D-BAUG Analysis I HS 2015
Dr. Meike Akveld

Clicker Fragen

Frage 1

Der Satz: "Dieser Satz ist falsch"

- ◯ ist wahr
- ◯ ist richtig
- √ ◯ weiss ich nicht

Es handelt hier um eine sogenannte Paradoxie. Die Paradoxie dieses Satzes besteht darin, dass sich nicht vernünftigerweise behaupten lässt, er sei wahr oder falsch. Angenommen der Satz wäre falsch: Dann würde das zutreffen, was der Satz selbst behauptet, und er müsste also wahr sein. Nehmen wir aber an, er sei wahr, dann trifft das, was der Satz behauptet, nicht zu was bedeutet, dass er falsch ist

Frage 2

Die Aussage

$$\forall c \geq 0 \, \forall n \geq 1 \, \exists! \xi \geq 0 : \xi^n = c$$

ist

- √ ◯ ist richtig
- ◯ ist falsch

Wir nennen dieses ξ die n. Wurzel aus c und schreiben $\xi = \sqrt[n]{c}$. Nun gilt $\xi^n = (\sqrt[n]{c})^n = c$ egal was c und n sind so lange gilt $c \geq 0$ und $n \geq 1$.

Frage 3

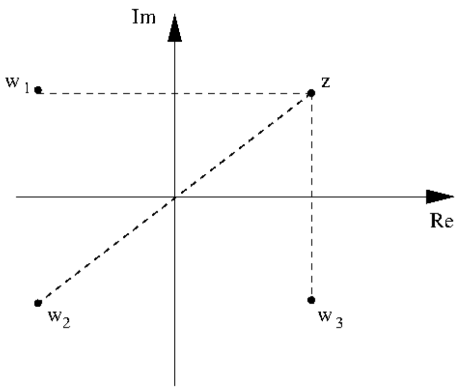
$(a, b] =$

- ◯ $\{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}$
- √ ◯ $\{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leq b\}$
- ◯ $\{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}$
- ◯ $\{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x < b\}$

Hier gibt's nichts zu verstehen. Eine runde Klammer bedeutet laut Definition, dass dieses Element nicht mehr zum Intervall gehört; eine eckige Klammer besagt, dass dieses Element noch zum Intervall gehört.

Frage 4

Welche Zahl stellt die komplex Konjugierte von z dar?

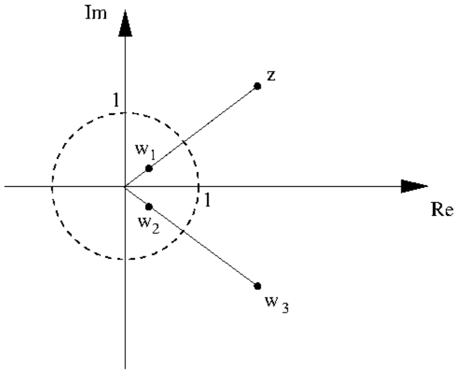


- ○ w_1
- ○ w_2
- √ ○ w_3

Die Konjugierte einer komplexen Zahl $z = x + iy$ ist definiert durch $\overline{z} := x - iy$. Dies entspricht geometrisch eine Spiegelung an der x-Achse, d.h. die richtige Antwort ist w_3.

Frage 5

Gegeben sei die komplexe Zahl $z \neq 0$.



Welche komplexe Zahl stellt den Kehrwert von z dar?

◯ w_1

√ ◯ w_2

◯ w_3

Der Kehrwert von $z = x + iy$ ist gegeben durch

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

Somit gilt $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot \operatorname{Re}(z)$ und $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{x^2+y^2} \cdot \operatorname{Im}(z)$. Also beiden wurden gespiegelt am Kreis, der Imaginärteil zusätzlich noch an der x-Achse.

Frage 6

Die Aussage: Die Menge $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| = 16\}$ beschreibt einen Kreis mit Radius 4 und Mittelpunkt z_0

◯ ist richtig

√ ◯ ist falsch

Wenn man die komplexe Zahlen als Punkte in der komplexen Ebene betrachtet, so berechnet $|z - z_0|$ die Länge der Strecke die z mit z_0 verbindet – überlegen Sie selbst wieso! – und so haben alle Punkte z, die die Gleichung $|z - z_0| = 16$ erfüllen eine Distanz von 16 zu z_0. D.h. sie liegen auf einem Kreis mit Mittelpunkt z_0 und Radius 16.

Frage 7

Die Aussage $\forall\varphi : \quad |\exp(i\varphi)| = 1$ ist

◯ ist falsch

√ ◯ ist richtig

Die Abkürzung "exp" steht für $\exp(i\varphi) := \cos\varphi + i\sin\varphi$. Berechnen wir nun den Betrag, so erhalten wir

$$|\exp(i\varphi)| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$$

unabhängig von dem Winkel φ.

Frage 8

Was lsst sich ber den 10-er Logarithmus $\log_{10}(2014 \cdot 2014)$ mit Bestimmtheit sagen? Der Logarithmus

◯ ist grösser als 2014

√ ◯ ist kleiner als 8

◯ ist eine natürliche Zahl

◯ ist kleiner als 6

Aus der Monotonie der Logarithmus-Funktion und den Logarithmengesetzen folgt

$\log_{10}(2014 \cdot 2014) \geq \log_{10}(2000 \cdot 2000) = \log_{10}(4 \cdot 10^6) = \log_{10}(4) + \log_{10}(10^6) = 6.????$

da $\log_{10}(4) > 0$ und damit ist nur die 2.Antwort richtig.

Frage 9

Die Aussage: Sei $p(\lambda) = \lambda^4 - \lambda$ ein komplexes Polynom, so gilt:

$$\lambda^4 - \lambda = \lambda(\lambda^3 - 1)$$

und daraus folgt $\lambda_1 = 0$ ist eine einfache Nullstelle und $\lambda_2 = 1$ ist eine dreifache Nullstelle

◯ ist richtig

√ ◯ ist falsch

Obwohl die Faktorisierung korrekt ist, stimmt die Schlussfolgerung nicht. Die Gleichung $\lambda^3 - 1$ lässt sich nämlich noch weiter über faktorisieren. Es gilt $\lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$und somit sind die weitere Nullstellen $\lambda_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Frage 10

Die folgende Inklusion ist

$$\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) \cdot \mathrm{Im}(z) > 0\} \subset \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

○ ist richtig

√ ○ ist falsch

Ein einfaches Gegenbeispiel liefert die Zahl $z = -1 - i$. Hier gilt $\mathrm{Re}(z) \cdot \mathrm{Im}(z) = (-1) \cdot (-1) > 0$ aber $\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) = -1 + (-1) < 0$. Der Punkt liegt damit in der Menge links, aber nicht in der Menge rechts und somit stimmt die Inklusion nicht.

Frage 11

Das Argument der komplexen Zahl $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ ist

○ $\frac{2\pi}{3}$

√ ○ $-\frac{2\pi}{3}$

Eine komplexe Zahl z kann man in Polarform schreiben als $z = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$. Wir müssen die angegebene Zahl also erst in diese Form bringen

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$

und somit ist das Argument $-\frac{2\pi}{3}$. Wir haben hier verwendet, dass die Kosinusfunktion eine gerade Funktion ist, d.h. $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ und dass die Sinusfunktion eine ungerade Funktion ist, d.h. $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$

Frage 12

Welche (eine oder mehr richtige Antworte) der folgenden Aussagen trifft zu auf die Folge $a_n = \sin \frac{n\pi}{6}$?

○ Die Folge ist unbeschränkt.

○ Die Folge ist monoton.

○ Die Folge konvergiert zu einer Zahl, die kleiner als 1 ist.

√ ○ Die Folge ist beschränkt.

○ Die Folge divergiert nach unendlich.

Diese Folge ist periodisch (mit Periode 12) und durchläuft die Werte

$$\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0$$

Sie ist also beschränkt mit Schrank 1 ($|a_n| \leq 1 \forall n$), sie ist nicht monoton, da sie mal wächst und mal wieder kleiner wird. Sie ist auch nicht konvergent da sie für immer zwischen diesen Werten hin und her hüpft und damit divergiert sie auch nicht nach unendlich.

Frage 13

Die Reihe $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ konvergiert wenn $\{a_k\}$ eine Nullfolge ist.

○ stimmt

√ ○ falsch

Das beŕuhmte Gegenbeispiel ist die harmonische Reihe $s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ für welche die Folge $a_k = \frac{1}{k}$ klar eine Nullfolge ist (d.h. sie konvergiert gegen Null), aber wovon wir wissen dass die Reihe selber nicht konvergiert, sondern nach unendlich divergiert (obwohl sehr, sehr langsam).

Frage 14

$-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \ldots$ ist gleich

- ◯ $-\frac{3}{2}$
- √ ◯ $-\frac{3}{4}$
- ◯ $\frac{3}{4}$
- ◯ $\frac{3}{2}$
- ◯ diese Reihe konvergiert nicht
- ◯ diese Reihe hat einen anderen Grenzwert

Diese Reihe ist eine geometrische Reihe der Form $\sum_{k=0}^{n} a_0 \cdot q^k$ mit $a_0 = -1$ und $q = -\frac{1}{3}$. Falls $|q| < 1$ gibt es die Summenformel $\sum_{k=0}^{n} a_0 \cdot q^k = \frac{a_0}{1-q}$. Also in unserem Fall konvergiert die Reihe und hat als Grenzwert den Wert $\frac{a_0}{1-q} = \frac{-1}{1-(-\frac{1}{3})} = -\frac{3}{4}$

Frage 15

Bestimmen Sie alle ganze Zahlen $k > 1$, so dass die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{kn}}{n} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{k}{4}\right)^n$$

beide konvergieren.

- ◯ $k = 2$
- √ ◯ $k = 3$
- ◯ $k = 4$
- ◯ $k = 2$ und $k = 3$
- ◯ $k = 3$ und $k = 5$

Die erste Reihe ist je nach Parität von k die harmonische Reihe (wenn k gerade ist), die bekanntlicherweise divergiert, oder die dazu gehörende alternierende Reihe (wenn k ungerade ist), die konvergiert. Die zweite Reihe ist eine geometrische Reihen mit $q = \frac{k}{4}$, welche nur konvergiert für $|q| < 1$. Somit muss gelten i) $k > 1$ aus der Aufgabenstellung, ii) k ist ungerade wegen der ersten Reihe und iii) $k < 4$ wegen der zweiten Reihen und somit bleibt nur $k = 3$.

Frage 16

Durch welchen Pfeil sollte man die Fragezeichen ersetzen? "Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert" ??? "die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut"

- ◯ $\Rightarrow$
- √ ◯ $\Leftarrow$
- ◯ $\Leftrightarrow$

Dass der Pfeil $\Rightarrow$ falsch ist lässt sich leicht an einem Gegenbeispiel zeigen: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ konvergiert nach Leibniz, aber die absolute Reihe ergibt die harmonische Reihe die bekanntlicherweise divergiert. Es gilt aber

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

wenn nun die rechte Seite konvergiert (absoluter Konvergenz), so ist sie damit eine konvergierende Majorante für die Reihe auf der linken Seite, die deshalb nach dem Majorantenkriterium auch konvergiert.

Frage 17

Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : n \mapsto \frac{n}{2} + \frac{1-(-1)^n}{4}$$

so gilt

- ○ Diese Funktion ist nicht wohl-definiert da sie auch Werte annimmt die nicht ganz-zahlig sind.
- √ ○ Diese Funktion ist surjektiv aber nicht injektiv
- ○ Diese Funktion ist injektiv aber nicht surjektiv
- ○ Diese Funktion ist weder injektiv noch surjektiv
- ○ Diese Funktion ist bijektiv

Wir machen folgende Fallunterscheidung: Falls $n = 2k$ so gilt

$$f(n) = f(2k) = \frac{2k}{2} + \frac{1-(-1)^{2k}}{4} = k + \frac{0}{4} = k,$$

also ganzzahlig und falls $n = 2k+1$ so gilt

$$f(n) = f(2k+1) = \frac{2k+1}{2} + \frac{1-(-1)^{2k+1}}{4} = k\frac{1}{2} + \frac{2}{4} = k+1,$$

was wiederum ganzzahlig ist. Damit ist die erste Behauptung falsch. Nun bemerke man dass

$$f(1) = \frac{1}{2} + \frac{1-(-1)^1}{4} = 1 \quad \text{und} \quad f(2) = \frac{2}{2} + \frac{1-(-1)^2}{4} = 1$$

und somit ist die Funktion nicht injektiv. Um zu beweisen, dass sie surjektiv ist, müssen wir zeigen, dass es für jedes $m \in$ mindestens ein $n \in$ gibt für welche gilt $f(n) = m$. Also, wir müssen zeigen, dass die Gleichung $\frac{n}{2} + \frac{1-(-1)^n}{4} = m$ mindestens eine Lösung hat. Also, lösen wir sie :-)

$$\frac{n}{2} + \frac{1-(-1)^n}{4} = m \iff 2n + 1 - (-1)^n = 4m \iff n_1 = 2m \vee n_2 = 2m-1$$

und somit hat die Gleichung zwei Lösungen und ist die Funktion als surjektiv.

Frage 18

Was ist die Umkehrfunktion der Funktion $f(x) = \frac{1}{1+2e^x}$ definiert auf dem Intervall $(0,1)$?

- ○ $f^{-1}(x) = \ln(1 + 2e^{-x})$
- √ ○ $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1-x}{2x}\right)$
- ○ $f^{-1}(x) = 1 + 2e^x$
- ○ $f^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$

Damit eine Umkehrfunktion überhaupt existiert, muss die Funktion auf dem vorgegebenen Intervall bijektiv sein. Für differenzierbare Funktionen ist dies äquivalent zu zeigen, dass die Ableitung das Vorzeichen nicht wechselt (sehen Sie wieso!!). Für unsere Funktion gilt

$$f'(x) = \frac{-2e^x}{(1+2e^x)^2} < 0 \quad \forall x \in (0,1)$$

Also, es gibt eine Umkehrfunktion und um sie zu bestimmen müssen wir die Gleichung $y = \frac{1}{1+2e^x}$ nach x auflösen.

$$y = \frac{1}{1+2e^x} \iff \frac{1}{y} = 1 + 2e^x \iff e^x = \frac{\frac{1}{y} - 1}{2} \iff x = \ln\left(\frac{\frac{1}{y} - 1}{2}\right)$$

und damit ist die Unkehrfunktion $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1-x}{2x}\right)$

Frage 19

Was ist der Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{x - x^2}$$

- ○ 0
- √ ○ 1

Wir berechnen den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{x - x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1-x} = 1$$

wobei das erste Gleichungszeichen stimmt, weil in der Grenzwertberechnung x nur gegen 0 strebt aber nicht gleich zu 0 ist und deshalb dürfen wir durch x teilen.

Frage 20

Sei f eine differenzierbare ungerade Funktion mit einem lokalen Minimum bei $x = c$. So gilt

○ f hat auch ein lokales Minimum bei $x = -c$

√ ○ f hat ein lokales Maximum bei $x = -c$

Ohne die Definition der Ableitung zu verwenden, heisst ein lokales Maximum folgendes:

$$f(x) \leq f(c) \; \forall x \text{ genügend nahe bei } c$$

Da aber gilt $f(x) = -f(-x)$ ist dies äquivalent zu $-f(-x) \leq -f(-c)$ was sich umformen lässt zu $f(-x) \geq f(-c)$ für $-x$ genügend nahe bei $-c$. Dies ist aber die Definition eines lokales Minimum. Da bei ungeraden Funktionen der Graph spiegelsymmetrisch ist bez. der Ursprung, macht dies durchaus Sinn :-)

Frage 21

Sei $f(x) = 2^x$ so gilt

○ $f'(x) = x \cdot 2^{x-1}$

○ $f'(x) = 2^x$

○ $f'(x) = \log_2 x$

√ ○ $f'(x) = \ln 2 \cdot 2^x$

Es gilt $f(x) = 2^x = \left(e^{\ln 2}\right)^x = e^{x \cdot \ln 2}$ (Potenzgesetzen!). Nach der Kettenregel gilt also $f'(x) = \ln 2 \cdot e^{x \cdot \ln 2} = \ln 2 \cdot 2^x$.

Frage 22

Sei f eine überall definierte und differentierbare Funktion mit einem lokalen Extremum an der Stelle $x = 2$, mit Funktionswert $f(2) = 0$. Betrachte nun die Funktion $g(x) = x \cdot f(x) + 1$ Was kann man über g sagen an der Stelle $x = 2$?

○ $g'(2) \neq 0$

○ g hat einen kritischen Punkt bei $x = 2$ – dies könnte aber ein Wendepunkt sein

√ ○ g hat auch ein lokales Extremum bei $x = 2$

Durch einsetzen sehen wir, dass $g(2) = 2 \cdot f(2) + 1 = 1$ und aus $g'(x) = f(x) + x \cdot f'(x)$ folgt $g'(2) = f(2) + 2 \cdot f'(2) = 0$. O.B.d.A. nehmen wir an, dass $f''(2) \neq 0$ (statt allgemein anzunehmen, dass die erste nicht verschwindende Ableitung an der Stelle $x = 2$ der Form ist $f^{(2n)}(2) \neq 0$ für irgendein n). Also gilt $g''(x) = 2f'(x) + x \cdot f''(x)$ und daraus folgt $g''(2) = 2f'(2) + 2 \cdot f''(2) = 2 \cdot f''(2) \neq 0$ und deshalb kann man mit Sicherheit sagen, dass $x = 2$ eine lokale Extremalstelle von g ist und nicht ein Wendestelle.

Frage 23

Der Mittelwertsatz besagt, dass fürr eine stetige Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$, die differentierbar ist auf (a, b), einen Wert c existiert, so dass

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Behauptung: Für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist c das geometrische Mittel von a und b.

- ◯ stimmt nicht
- √ ◯ stimmt

Beachte, dass $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Nun gilt aber auch

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{b - a} = \frac{a - b}{a \cdot b \cdot (b - a)} = -\frac{1}{ab} = -\frac{1}{(\sqrt{ab})^2} = f'(\sqrt{ab})$$

Also, die Behauptung stimmt.

Frage 24

Welche Aussage ist richtig?

- ◯ Der Kosinus Hyperbolicus und der Sinus Hyperbolicus sind beide gerade Funktionen
- ◯ Der Kosinus Hyperbolicus und der Sinus Hyperbolicus sind beide ungerade Funktionen
- √ ◯ Der Kosinus Hyperbolicus ist eine gerade und der Sinus Hyperbolicus ist eine ungerade Funktion
- ◯ Der Kosinus Hyperbolicus ist eine ungerade und der Sinus Hyperbolicus ist eine gerade Funktion
- ◯ Keine der obigen Aussagen ist richtig

Dies folgt direkt aus den Definitionen. Eine Funktion wird gerade genannt falls $\forall x \in D : f(-x) = f(x)$ und ungerade falls $\forall x \in D : f-(x) = -f(x)$. Nun gilt $\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ und $\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Einfaches Einsetzen zeigt, dass die 3. Behauptung die richtige ist.

Frage 25

Die Ableitung der Kosinus Hyperbolicus $f(x) = \cosh(x)$ ist:

- ◯ $f'(x) = \cosh(x)$
- √ ◯ $f'(x) = \sinh(x)$
- ◯ $f'(x) = -\cosh(x)$
- ◯ $f'(x) = -\sinh(x)$

Dies folgt direkt aus der Definition $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ und somit $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$, wobei wir den Kettenregel verwendet haben um e^{-x} abzuleiten.

Frage 26

Die Aussage: Betrachte das Newton-Verfahren für die Funktion $f(x) = x^2 - 3$ und Startwert $x_0 = 1$ so gilt $x_2 = 1.75$

- ◯ ist falsch
- √ ◯ ist richtig

Die Rekursionsformel für das Newton-Verfahren lautet

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 3}{2x_n}$$

und mit $x_0 = 1$ erhalten wir $x_1 = 1 - \frac{1^2-3}{2\cdot 1} = 2$ und $x_2 = 2 - \frac{2^2-3}{2\cdot 2} = 1.75$.