

Clicker Fragen

Frage 1

Der Satz: "Dieser Satz ist falsch"

- ist wahr
- ist richtig
- ✓ weiss ich nicht

Es handelt hier um eine sogenannte Paradoxie. Die Paradoxie dieses Satzes besteht darin, dass sich nicht vernünftigerweise behaupten lässt, er sei wahr oder falsch. Angenommen der Satz wäre falsch: Dann würde das zutreffen, was der Satz selbst behauptet, und er müsste also wahr sein. Nehmen wir aber an, er sei wahr, dann trifft das, was der Satz behauptet, nicht zu was bedeutet, dass er falsch ist

Frage 2

Die Aussage

$$\forall c \geq 0 \forall n \geq 1 \exists! \xi \geq 0 : \xi^n = c$$

ist

- ✓ ist richtig
- ist falsch

Wir nennen dieses ξ die n . Wurzel aus c und schreiben $\xi = \sqrt[n]{c}$. Nun gilt $\xi^n = (\sqrt[n]{c})^n = c$ egal was c und n sind so lange gilt $c \geq 0$ und $n \geq 1$.

Frage 3

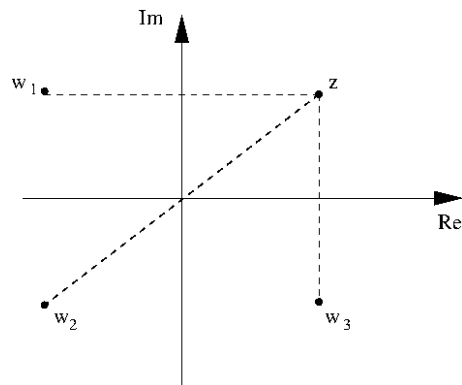
$(a, b] =$

- $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- ✓ $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

Hier gibt's nichts zu verstehen. Eine runde Klammer bedeutet laut Definition, dass dieses Element nicht mehr zum Intervall gehört; eine eckige Klammer besagt, dass dieses Element noch zum Intervall gehört.

Frage 4

Welche Zahl stellt die komplex Konjugierte von z dar?

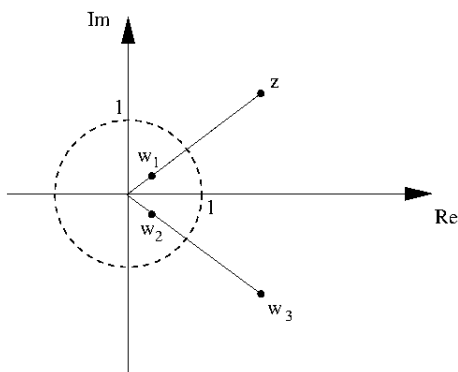


- w_1
- w_2
- ✓ w_3

Die Konjugierte einer komplexen Zahl $z = x + iy$ ist definiert durch $\bar{z} := x - iy$. Dies entspricht geometrisch eine Spiegelung an der x -Achse, d.h. die richtige Antwort ist w_3 .

Frage 5

Gegeben sei die komplexe Zahl $z \neq 0$.



Welche komplexe Zahl stellt den Kehrwert von z dar?

- w_1
- ✓ w_2
- w_3

Der Kehrwert von $z = x + iy$ ist gegeben durch

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{1}{x + iy} \cdot \frac{x - iy}{x - iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

Somit gilt $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \operatorname{Re}(z)$ und $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \operatorname{Im}(z)$. Also beiden wurden gespiegelt am Kreis, der Imaginärteil zusätzlich noch an der x -Achse.

Frage 6

Die Aussage: Die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = 16\}$ beschreibt einen Kreis mit Radius 4 und Mittelpunkt z_0

- ist richtig
- ✓ ist falsch

Wenn man die komplexe Zahlen als Punkte in der komplexen Ebene betrachtet, so berechnet $|z - z_0|$ die Länge der Strecke die z mit z_0 verbindet – überlegen Sie selbst wieso! – und so haben alle Punkte z , die die Gleichung $|z - z_0| = 16$ erfüllen eine Distanz von 16 zu z_0 . D.h. sie liegen auf einem Kreis mit Mittelpunkt z_0 und Radius 16.

Frage 7

Die Aussage $\forall \varphi : |\exp(i\varphi)| = 1$ ist

- ist falsch
✓ ist richtig

Die Abkürzung “exp” steht für $\exp(i\varphi) := \cos \varphi + i \sin \varphi$. Berechnen wir nun den Betrag, so erhalten wir

$$|\exp(i\varphi)| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1$$

unabhängig von dem Winkel φ .

Frage 8

Was lässt sich über den 10-er Logarithmus $\log_{10}(2014 \cdot 2014)$ mit Bestimmtheit sagen? Der Logarithmus

- ist grösser als 2014
✓ ist kleiner als 8
 ist eine natürliche Zahl
 ist kleiner als 6

Aus der Monotonie der Logarithmus-Funktion und den Logarithmengesetzen folgt

$$\log_{10}(2014 \cdot 2014) \geq \log_{10}(2000 \cdot 2000) = \log_{10}(4 \cdot 10^6) = \log_{10}(4) + \log_{10}(10^6) = 6.????$$

da $\log_{10}(4) > 0$ und damit ist nur die 2. Antwort richtig.

Frage 9

Die Aussage: Sei $p(\lambda) = \lambda^4 - \lambda$ ein komplexes Polynom, so gilt:

$$\lambda^4 - \lambda = \lambda(\lambda^3 - 1)$$

und daraus folgt $\lambda_1 = 0$ ist eine einfache Nullstelle und $\lambda_2 = 1$ ist eine dreifache Nullstelle

- ist richtig
✓ ist falsch

Obwohl die Faktorisierung korrekt ist, stimmt die Schlussfolgerung nicht. Die Gleichung $\lambda^3 - 1$ lässt sich nämlich noch weiter über \mathbb{C} faktorisieren. Es gilt $\lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$ und somit sind die weiteren Nullstellen $\lambda_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Frage 10

Die folgende Inklusion ist

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z) > 0\} \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

- ist richtig
✓ ist falsch

Ein einfaches Gegenbeispiel liefert die Zahl $z = -1 - i$. Hier gilt $\operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z) = (-1) \cdot (-1) > 0$ aber $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = -1 + (-1) < 0$. Der Punkt liegt damit in der Menge links, aber nicht in der Menge rechts und somit stimmt die Inklusion nicht.

Frage 11

Das Argument der komplexen Zahl $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ ist

- $\frac{2\pi}{3}$
✓ $-\frac{2\pi}{3}$

Eine komplexe Zahl z kann man in Polarform schreiben als $z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Wir müssen die angegebene Zahl also erst in diese Form bringen

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$

und somit ist das Argument $-\frac{2\pi}{3}$. Wir haben hier verwendet, dass die Kosinusfunktion eine gerade Funktion ist, d.h. $\cos(-\varphi) = \cos \varphi$ und dass die Sinusfunktion eine ungerade Funktion ist, d.h. $\sin(-\varphi) = -\sin \varphi$

Frage 12

Welche (eine oder mehr richtige Antwort(e)) der folgenden Aussagen trifft zu auf die Folge $a_n = \sin \frac{n\pi}{6}$?

- Die Folge ist unbeschränkt.
- Die Folge ist monoton.
- Die Folge konvergiert zu einer Zahl, die kleiner als 1 ist.
- ✓ Die Folge ist beschränkt.
- Die Folge divergiert nach unendlich.

Diese Folge ist periodisch (mit Periode 12) und durchläuft die Werte

$$\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0$$

Sie ist also beschränkt mit Schrank 1 ($|a_n| \leq 1 \forall n$), sie ist nicht monoton, da sie mal wächst und mal wieder kleiner wird. Sie ist auch nicht konvergent da sie für immer zwischen diesen Werten hin und her hüpfert und damit divergiert sie auch nicht nach unendlich.

Frage 13

Die Reihe $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$ konvergiert wenn $\{a_k\}$ eine Nullfolge ist.

- stimmt
- ✓ falsch

Das berühmte Gegenbeispiel ist die harmonische Reihe $s_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ für welche die Folge $a_k = \frac{1}{k}$ klar eine Nullfolge ist (d.h. sie konvergiert gegen Null), aber wovon wir wissen dass die Reihe selber nicht konvergiert, sondern nach unendlich divergiert (obwohl sehr, sehr langsam).

Frage 14

$-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \dots$ ist gleich

- $-\frac{3}{2}$
 $-\frac{3}{4}$
 $\frac{3}{4}$
 $\frac{3}{2}$
 diese Reihe konvergiert nicht
 diese Reihe hat einen anderen Grenzwert

Diese Reihe ist eine geometrische Reihe der Form $\sum_{k=0}^n a_0 \cdot q^k$ mit $a_0 = -1$ und $q = -\frac{1}{3}$. Falls $|q| < 1$ gibt es die Summenformel $\sum_{k=0}^n a_0 \cdot q^k = \frac{a_0}{1-q}$. Also in unserem Fall konvergiert die Reihe und hat als Grenzwert den Wert $\frac{a_0}{1-q} = \frac{-1}{1-(-\frac{1}{3})} = -\frac{3}{4}$

Frage 15

Bestimmen Sie alle ganze Zahlen $k > 1$, so dass die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{kn}}{n} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{k}{4}\right)^n$$

beide konvergieren.

- $k = 2$
 $k = 3$
 $k = 4$
 $k = 2$ und $k = 3$
 $k = 3$ und $k = 5$

Die erste Reihe ist je nach Parität von k die harmonische Reihe (wenn k gerade ist), die bekanntlicherweise divergiert, oder die dazu gehörende alternierende Reihe (wenn k ungerade ist), die konvergiert. Die zweite Reihe ist eine geometrische Reihen mit $q = \frac{k}{4}$, welche nur konvergiert für $|q| < 1$. Somit muss gelten i) $k > 1$ aus der Aufgabenstellung, ii) k ist ungerade wegen der ersten Reihe und iii) $k < 4$ wegen der zweiten Reihen und somit bleibt nur $k = 3$.

Frage 16

Durch welchen Pfeil sollte man die Fragezeichen ersetzen? “Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert” ??? “die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut”

- \Rightarrow
- ✓ \Leftarrow
- \Leftrightarrow

Dass der Pfeil \Rightarrow falsch ist lässt sich leicht an einem Gegenbeispiel zeigen: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ konvergiert nach Leibniz, aber die absolute Reihe ergibt die harmonische Reihe die bekanntlicherweise divergiert. Es gilt aber

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

wenn nun die rechte Seite konvergiert (absoluter Konvergenz), so ist sie damit eine konvergierende Majorante für die Reihe auf der linken Seite, die deshalb nach dem Majorantenkriterium auch konvergiert.

Frage 17

Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} : n \mapsto \frac{n}{2} + \frac{1 - (-1)^n}{4}$$

so gilt

- Diese Funktion ist nicht wohl-definiert da sie auch Werte annimmt die nicht ganz-zahlig sind.
- ✓ Diese Funktion ist surjektiv aber nicht injektiv
- Diese Funktion ist injektiv aber nicht surjektiv
- Diese Funktion ist weder injektiv noch surjektiv
- Diese Funktion ist bijektiv

Wir machen folgende Fallunterscheidung: Falls $n = 2k$ so gilt

$$f(n) = f(2k) = \frac{2k}{2} + \frac{1 - (-1)^{2k}}{4} = k + \frac{0}{4} = k,$$

also ganzzahlig und falls $n = 2k + 1$ so gilt

$$f(n) = f(2k + 1) = \frac{2k + 1}{2} + \frac{1 - (-1)^{2k+1}}{4} = k\frac{1}{2} + \frac{2}{4} = k + 1,$$

was wiederum ganzzahlig ist. Damit ist die erste Behauptung falsch. Nun bemerke man dass

$$f(1) = \frac{1}{2} + \frac{1 - (-1)^1}{4} = 1 \quad \text{und} \quad f(2) = \frac{2}{2} + \frac{1 - (-1)^2}{4} = 1$$

und somit ist die Funktion nicht injektiv. Um zu beweisen, dass sie surjektiv ist, müssen wir zeigen, dass es für jedes $m \in \mathbb{Z}$ mindestens ein $n \in \mathbb{Z}$ gibt für welche gilt $f(n) = m$. Also, wir müssen zeigen, dass die Gleichung $\frac{n}{2} + \frac{1 - (-1)^n}{4} = m$ mindestens eine Lösung hat. Also, lösen wir sie :-)

$$\frac{n}{2} + \frac{1 - (-1)^n}{4} = m \iff 2n + 1 - (-1)^n = 4m \iff n_1 = 2m \vee n_2 = 2m - 1$$

und somit hat die Gleichung zwei Lösungen und ist die Funktion als surjektiv.

Frage 18

Was ist die Umkehrfunktion der Funktion $f(x) = \frac{1}{1+2e^x}$ definiert auf dem Intervall $(0, 1)$?

- $f^{-1}(x) = \ln(1 + 2e^{-x})$
- ✓ $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1-x}{2x}\right)$
- $f^{-1}(x) = 1 + 2e^x$
- $f^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$

Damit eine Umkehrfunktion überhaupt existiert, muss die Funktion auf dem vorgegebenen Intervall bijektiv sein. Für differenzierbare Funktionen ist dies äquivalent zu zeigen, dass die Ableitung das Vorzeichen nicht wechselt (sehen Sie wieso!!). Für unsere Funktion gilt

$$f'(x) = \frac{-2e^x}{(1+2e^x)^2} < 0 \quad \forall x \in (0, 1)$$

Also, es gibt eine Umkehrfunktion und um sie zu bestimmen müssen wir die Gleichung $y = \frac{1}{1+2e^x}$ nach x auflösen.

$$y = \frac{1}{1+2e^x} \iff \frac{1}{y} = 1 + 2e^x \iff e^x = \frac{\frac{1}{y} - 1}{2} \iff x = \ln\left(\frac{\frac{1}{y} - 1}{2}\right)$$

und damit ist die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1-x}{2x}\right)$

Frage 19

Was ist der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x - x^2}$$

- 0
- ✓ 1

Wir berechnen den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - x} = 1$$

wobei das erste Gleichungszeichen stimmt, weil in der Grenzwertberechnung x nur gegen 0 strebt aber nicht gleich zu 0 ist und deshalb dürfen wir durch x teilen.

Frage 20

Sei f eine differenzierbare ungerade Funktion mit einem lokalen Minimum bei $x = c$. So gilt

- f hat auch ein lokales Minimum bei $x = -c$
- ✓ f hat ein lokales Maximum bei $x = -c$

Ohne die Definition der Ableitung zu verwenden, heisst ein lokales Maximum folgendes:

$$f(x) \leq f(c) \quad \forall x \text{ genügend nahe bei } c$$

Da aber gilt $f(x) = -f(-x)$ ist dies äquivalent zu $-f(-x) \leq -f(-c)$ was sich umformen lässt zu $f(-x) \geq f(-c)$ für $-x$ genügend nahe bei $-c$. Dies ist aber die Definition eines lokalen Minimum. Da bei ungeraden Funktionen der Graph spiegelsymmetrisch ist bez. der Ursprung, macht dies durchaus Sinn :-)

Frage 21

Sei $f(x) = 2^x$ so gilt

- $f'(x) = x \cdot 2^{x-1}$
- $f'(x) = 2^x$
- $f'(x) = \log_2 x$
- ✓ $f'(x) = \ln 2 \cdot 2^x$

Es gilt $f(x) = 2^x = (e^{\ln 2})^x = e^{x \cdot \ln 2}$ (Potenzgesetzen!). Nach der Kettenregel gilt also $f'(x) = \ln 2 \cdot e^{x \cdot \ln 2} = \ln 2 \cdot 2^x$.

Frage 22

Sei f eine überall definierte und differentierbare Funktion mit einem lokalen Extremum an der Stelle $x = 2$, mit Funktionswert $f(2) = 0$. Betrachte nun die Funktion $g(x) = x \cdot f(x) + 1$ Was kann man über g sagen an der Stelle $x = 2$?

- $g'(2) \neq 0$
- g hat einen kritischen Punkt bei $x = 2$ – dies könnte aber ein Wendepunkt sein
- ✓ g hat auch ein lokales Extremum bei $x = 2$

Durch einsetzen sehen wir, dass $g(2) = 2 \cdot f(2) + 1 = 1$ und aus $g'(x) = f(x) + x \cdot f'(x)$ folgt $g'(2) = f(2) + 2 \cdot f'(2) = 0$. O.B.d.A. nehmen wir an, dass $f''(2) \neq 0$ (statt allgemein anzunehmen, dass die erste nicht verschwindende Ableitung an der Stelle $x = 2$ der Form ist $f^{(2n)}(2) \neq 0$ für irgendein n). Also gilt $g''(x) = 2f'(x) + x \cdot f''(x)$ und daraus folgt $g''(2) = 2f'(2) + 2 \cdot f''(2) = 2 \cdot f''(2) \neq 0$ und deshalb kann man mit Sicherheit sagen, dass $x = 2$ eine lokale Extremalstelle von g ist und nicht ein Wendestelle.

Frage 23

Der Mittelwertsatz besagt, dass für eine stetige Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$, die differenzierbar ist auf (a, b) , einen Wert c existiert, so dass

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Behauptung: Für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist c das geometrische Mittel von a und b .

- stimmt nicht
- ✓ stimmt

Beachte, dass $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Nun gilt aber auch

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{b - a} = \frac{a - b}{a \cdot b \cdot (b - a)} = -\frac{1}{ab} = -\frac{1}{(\sqrt{ab})^2} = f'(\sqrt{ab})$$

Also, die Behauptung stimmt.

Frage 24

Welche Aussage ist richtig?

- Der Kosinus Hyperbolicus und der Sinus Hyperbolicus sind beide gerade Funktionen
- Der Kosinus Hyperbolicus und der Sinus Hyperbolicus sind beide ungerade Funktionen
- ✓ Der Kosinus Hyperbolicus ist eine gerade und der Sinus Hyperbolicus ist eine ungerade Funktion
- Der Kosinus Hyperbolicus ist eine ungerade und der Sinus Hyperbolicus ist eine gerade Funktion
- Keine der obigen Aussagen ist richtig

Dies folgt direkt aus den Definitionen. Eine Funktion wird gerade genannt falls $\forall x \in D : f(-x) = f(x)$ und ungerade falls $\forall x \in D : f(-x) = -f(x)$. Nun gilt $\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ und $\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Einfaches Einsetzen zeigt, dass die 3. Behauptung die richtige ist.

Frage 25

Die Ableitung der Kosinus Hyperbolicus $f(x) = \cosh(x)$ ist:

- $f'(x) = \cosh(x)$
- ✓ $f'(x) = \sinh(x)$
- $f'(x) = -\cosh(x)$
- $f'(x) = -\sinh(x)$

Dies folgt direkt aus der Definition $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ und somit $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$, wobei wir den Kettenregel verwendet haben um e^{-x} abzuleiten.

Frage 26

Die Aussage: Betrachte das Newton-Verfahren für die Funktion $f(x) = x^2 - 3$ und Startwert $x_0 = 1$ so gilt $x_2 = 1.75$

- ist falsch
- ✓ ist richtig

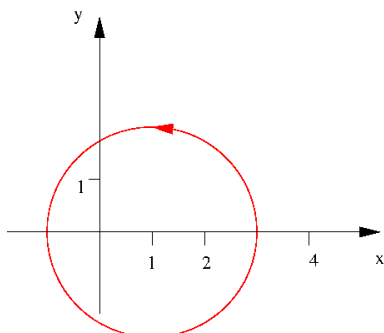
Die Rekursionsformel für das Newton-Verfahren lautet

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 3}{2x_n}$$

und mit $x_0 = 1$ erhalten wir $x_1 = 1 - \frac{1^2 - 3}{2 \cdot 1} = 2$ und $x_2 = 2 - \frac{2^2 - 3}{2 \cdot 2} = 1.75$.

Frage 27

Welche der folgenden Parametrisierungen beschreiben die folgende Kurve (achte auf die Orientierung!) – mehrere Antworten möglich



- $(x(t), y(t)) = (1 + 2 \cos(-t), 2 \sin(-t))$
- ✓ $(x(t), y(t)) = (1 + 2 \cos(-t), -2 \sin(-t))$
- ✓ $(x(t), y(t)) = (1 - 2 \cos(-t), 2 \sin(-t))$
- $(x(t), y(t)) = (1 - 2 \cos(-t), -2 \sin(-t))$

Man überprüfe zuerst was passiert wenn man für $t = 0$ einsetzt. Die erste zwei Antworten ergeben den Punkt $(3, 0)$ und die zweite zwei ergeben den Punkt $(-1, 0)$ – beide liegen auf dem Kreis. Man sieht auch schnell dass alle vier Parametrisierungen die Gleichung des Kreises $(x - 1)^2 + y^2 = 4$ erfüllen. Nun muss man sich überlegen in welche Richtung der Kreis durchlaufen wird. Für die erste Antwort, beachten man, dass die x -Koordinate zuerst abnimmt, wenn $t > 0$. Die y -Koordinate nimmt aber auch ab wenn $t > 0$ (wegen dem Minus vor dem t) und so dreht man also im Uhrzeigersinn was hier falsch ist. Auf ähnlicher Weise kann man über die andere Antworten entscheiden.

Frage 28

Die Aussage: Sei C eine Kurve parametrisiert durch $r(t) = (x(t), y(t)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit Krümmung κ , so hat die verwandte Kurve C^* , parametrisiert durch $r^*(t) = (x(-t), y(-t)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die gleiche Krümmung wie C

- stimmt
- ✓ stimmt nicht

Man kann dies sowohl rechnerisch wie auch geometrisch einsehen. Rechnerisch; Die Krümmung ist definiert durch

$$\kappa(r(t)) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{|r'(t)|^3}$$

Setzt man nun $r^*(t) = (x^*(t), y^*(t)) = (x(-t), y(-t))$ so sieht man, dass $x^{*'}(t) = -x'(t)$ und $x^{*''}(t) = x''(t)$ und genau so für $y^*(t)$ – dies folgt aus der Kettenregel – und damit ist die Behauptung wiederlegt. Geometrisch kann man sich überlegen dass r^* beschreibt wie man die Kurve C rückwärts traversiert. Damit werden Rechtskurven zu Linkskurven und v.v. und dies bedeutet dass die Krümmung zwar im Betrag gleich gross bleibt aber das Vorzeichen wechselt.

Frage 29

Betrachte die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

so ist der Konvergenzradius

- $\rho = 0$
- $\rho = 1$
- ✓ $\rho = \infty$
- Der Konvergenzradius existiert nicht

Der Konvergenzradius ist definiert durch

$$\rho := \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

wobei hier $a_k = \frac{1}{k!}$. Also ist zu berechnen (und mit Hilfe des Auslösen des Doppelbruches erhalten wir)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{k!}}{\frac{1}{(k+1)!}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)!}{k!} = \lim_{k \rightarrow \infty} (k+1) = \infty$$

Konkret heisst dies, dass diese Potenzreihe für jeden Wert von x einen endlichen Wert annimmt und somit eine Funktion auf ganz \mathbb{R} ist.

Frage 30

Die Potenzreihe

$$P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}} (x+3)^n$$

konvergiert für alle

- $x \in \mathbb{R}$
- $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
- $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
- $x \in (-\frac{7}{2}, \frac{5}{2}]$
- $x \in [-\frac{7}{2}, \frac{5}{2})$

Zuerst muss man hier den Konvergenzradius berechnen, wie vorher gilt

$$\rho := \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-2)^k}{\sqrt{k}}}{\frac{(-2)^{k+1}}{\sqrt{k+1}}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{k+1}}{2\sqrt{k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{k}}}{2} = \frac{1}{2}$$

Da die Potenzreihe entwickelt wurde um $x_0 = -3$ konvergiert sie somit sicher auch dem Intervall $(-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2})$. Nun müssen wir noch entscheiden was an den Randpunkten passiert. Dies machen wir jeweils durch einsetzen. Für $x = -\frac{7}{2}$ gilt

$$P\left(-\frac{7}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}} \left(-\frac{7}{2} + 3\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

und diese Reihe konvergiert bekannterweise nicht (die harmonische Reihe ist eine divergierende Minorante). Für $x = -\frac{5}{2}$ gilt

$$P\left(-\frac{5}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}} \left(-\frac{5}{2} + 3\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

Dies ist eine alternierende Reihe und nach Leibniz konvergiert sie.

Frage 31

Welche der folgenden Potenzreihen stellt die folgende Funktion dar $f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$

- $1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \dots$
- $x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \dots$
- $x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + \dots$
- ✓ $x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \dots$
- $x^2 - x^4 + x^6 - x^8 + \dots$

Setze $t = x^2$ so suchen wir die Potenzreihe von $t \cdot \frac{1}{1-t}$, dies ist aber bekannt, da

$$t \cdot \frac{1}{1-t} = t \cdot (1 + t + t^2 + t^3 + \dots)$$

ausmultiplizieren und t wieder ersetzen durch x^2 liefert das Resultat.

Frage 32

Welche der folgenden Reihen ist die Taylorreihe von $\cos x$ um $x = 0$?

- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$
- ✓ $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$
- $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

Sei $f(x) = \cos x$ so gilt für die Ableitungen: $f^{(4n)}(x) = \cos x$, $f^{(4n+1)}(x) = -\sin x$, $f^{(4n+2)}(x) = -\cos x$, $f^{(4n+3)}(x) = \sin x$ und somit $f^{(4n)}(0) = 1$, $f^{(4n+1)}(0) = 0$, $f^{(4n+2)}(0) = -1$, $f^{(4n+3)}(0) = 0$. D.h. alle ungerade Koeffizienten sind Null, was auch Sinn macht da der Kosinus eine gerade Funktion ist und also auch eine gerade Taylorreihe haben soll. Wir sehen auch, dass das Vorzeichen alterniert und da $f(0) = 1$ kann nur noch die mittlere Antwort richtig sein.

Frage 33

Was ist die beste Approximation von $\sqrt[4]{16+x}$ für kleine Werte von x ?

- $4 + \frac{x}{32}$
- ✓ $2 + \frac{x}{32}$
- $\frac{x}{32}$
- $4 - \frac{x}{32}$
- $2 - \frac{x}{32}$

Wir machen eine Taylorentwicklung der Funktion $f(x) = \sqrt[4]{16+x}$ an der Stelle $x = 0$. Also $f(0) = 2$. Weiter gilt $f'(x) = \frac{1}{4(\sqrt[4]{16+x})^3}$ und damit $f'(0) = \frac{1}{4 \cdot 8}$. Das Taylorpolynom 1.Grades ist nun gegeben durch

$$T_{x=0}(x) = f(0) + f'(0) \cdot x = 2 + \frac{1}{32} \cdot x$$

Frage 34

Das Integral $\int_{-1}^1 |x| dx$ ist gleich

- 0
- ✓ 1
- 2
- 4
- Keine der obigen Antworten ist richtig

Man kann dies entweder ausrechnen, indem man die abschnittsweise-Definition der Betragsfunktion einsetzt, oder man überlegt es sich geometrisch. Da die Betragsfunktion eine positive Funktion ist, berechnet das bestimmte Integral nichts anderes als die Fläche zwischen der x -Achse und dem Graph. In diesem Fall geht es also um die Summe der Flächen von 2 Dreiecken (rechtwinklig, gleichschenkelig mit Kathetenlänge gleich 1) oder auch zusammengefügt um ein Quadrat mit Seitenlänge 1. Also, die Fläche ist 1.

Frage 35

Betrachte die Funktion

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x \text{ rational ist,} \\ 1 & \text{falls } x \text{ irrational ist.} \end{cases}$$

Ist f Riemann-integrierbar oder nicht und was ist die richtige Begründung. Die Funktion f ist....

- integrierbar, weil sie beschränkt ist.
- nicht integrierbar, weil sie unstetig ist.
- integrierbar, weil die Stellen mit $f(x) = 0$ vernachlässigbar sind und sie ansonsten mit einer konstanten Funktion übereinstimmt.
- ✓ nicht integrierbar, weil sie in jedem Teilintervall von $[0, 1]$ beide Werte 0 und 1 annimmt und daher die Riemann-Summen nicht konvergieren.

Eine Funktion ist über ein Intervall Riemann-Integrierbar wenn alle Riemann-Summen zu dem gleichen Wert konvergieren. Betrachtet man hier die Ober- und die Untersumme, so bemerkt man, dass egal wie fein die Unterteilung in Teilintervallen, jedes Intervall enthält sowohl rationale wie auch irrationale Zahlen. Deshalb ist das Minimum von f über so einem Intervall immer 0 und das Maximum immer 1. Dies resultiert darin, dass die Obersumme immer 1 gibt und die Untersumme immer 0 und deshalb konvergieren sie nie und damit ist die Funktion nicht Riemann-integrierbar.

Frage 36

Betrachte die Fläche in der Ebene begrenzt durch den Graph von $y = \frac{1}{x}$, die x -Achse und die Geraden $x = m$ und $x = 2m$. So gilt für den Flächeninhalt dieser Fläche

- ✓ Er ist unabhängig von m
- Er wächst mit wachsendem m
- Er nimmt ab mit wachsendem m
- Er nimmt ab mit wachsendem m wenn $m < 0.5$ und er wächst mit wachsendem m wenn $m > 0.5$
- Er nimmt zu mit wachsendem m wenn $m < 0.5$ und er nimmt ab mit wachsendem m wenn $m > 0.5$

Zu berechnen ist das bestimmte Integral

$$\int \frac{1}{x} dx = [\ln x]_m^{2m} = \ln(2m) - \ln(m) = \ln\left(\frac{2m}{m}\right) = \ln 2$$

und dies ist also konstant und unabhängig von m .

Frage 37

Sei n eine gegebene positive ganze Zahl, für welchen Wert von q gilt

$$\int_1^q x^{n-1} dx = \frac{1}{n}$$

- $q = 0$
- $q = \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$
- $q = \left(\frac{2n-1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$
- ✓ $q = 2^{\frac{1}{n}}$
- $q = 2^n$

Wieder müssen wir ein bestimmtes Integral ausrechnen

$$\int_1^q x^{n-1} dx = \left[\frac{1}{n} x^n \right]_1^q = \frac{1}{n} (q^n - 1)$$

und nun ist folgende Gleichung zu lösen

$$\frac{1}{n} (q^n - 1) = \frac{1}{n} \iff q^n = 2 \iff q = \sqrt[n]{2} = 2^{\frac{1}{n}}$$

Frage 38

Welche (mehrere Antworten möglich) der folgenden Funktionen ist eine Stammfunktion von $f(x) = x$

- ✓ $\frac{x^2}{2} + 3$
- $\frac{(x-1)^2}{2}$
- ✓ $\frac{1+x^2}{2}$
- ✓ $\frac{x^2}{2}$

Durch Ableiten sieht man, dass die Antworten a, c und d korrekt sind – dies ist zurück zu führen auf die Integrationskonstante!

Frage 39

Betrachte die folgende Variablensubstitution

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} dx = \int u du$$

Welche Substitution wurde hier gemacht?

- $u = \ln x$
- $u = x \ln x$
- $u = \frac{1}{\ln x}$
- ✓ $u = \ln(\ln x)$
- $u = e^x$

Man sollte hier alle Vorschläge überprüfen. Wir beschränken uns darauf zu zeigen, wie die richtige Substitution funktioniert. Für $u = \ln(\ln x)$ gilt mit der Kettenregel $du = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} dx$ und somit

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} dx = \int \ln(\ln x) \cdot \frac{1}{x \ln x} dx = \int u du$$

Frage 40

Sei $\int_1^2 f(x - c) dx = 5$ für irgendeine Konstante c , so gilt

$$\int_{1-c}^{2-c} f(x) dx =$$

- $5 + c$
- ✓ 5
- $5 - c$
- $c - 5$
- -5

Hier liegt die Substitution $u = x - c$ auf der Hand, mit $du = dx$, $u(1) = 1 - c$ und $u(2) = 2 - c$, damit wird das Integral

$$5 = \int_1^2 f(x - c) dx = \int_{1-c}^{2-c} f(u) du$$

was natürlich das Gleiche ist wie das Integral in der Aufgabenstellung (obwohl x und u vertauscht wurde!).

Frage 41

Das Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \cdot e^x dx$

- ist positiv
✓ ist negativ

Die Exponentialfunktion nimmt nur positive Werte an und ist monoton wachsend. Die Kosinusfunktion in dieser Form ist positiv auf $[0, \frac{\pi}{4})$ und negativ auf dem gleich langen Intervall $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$. Da wir also die "grössere" Werte der Exponentialfunktion mit negativen Zahlen multiplizieren, ist das Gesamtergebn negativ. Mit Hilfe der partiellen Integration kann man den Wert genau bestimmen.

Frage 42

$$\int_2^3 \frac{1}{x^2(x-1)} dx = 2 \ln 2 - \ln 3 - \frac{1}{6}$$

- stimmt nicht
✓ stimmt

Nach der Theorie über Partialbruchzerlegung machen wir folgenden Ansatz

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2}$$

und erhalten durch gleichnamig machen

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{Ax^2 + Bx(x-1) + C(x-1)}{x^2(x-1)}$$

Koeffizientenvergleich lehrt uns, dass $A = 1$, $B = -1$ und $C = -1$ und somit

$$\int_2^3 \frac{1}{x^2(x-1)} dx = \int_2^3 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \left[\ln|x-1| - \ln|x| + \frac{1}{x} \right]_2^3 = 2 \ln 2 - \ln 3 - \frac{1}{6}$$

Frage 43

Bestimme die Länge der Kurve $y = \sqrt{1 - x^2}$ für $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

- 1
- $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ✓ $\frac{\pi}{6}$
- $\frac{\pi}{3}$
- $\frac{\pi}{2}$

Für einen Funktionsgraph $y = f(x)$ gilt folgende Formel für die Bogenlänge

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

also in unserem Fall

$$L = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = [\arcsin x]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6}$$

Frage 44

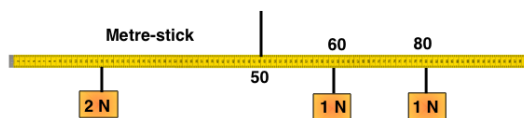
Betrachte die Ellipse E gegeben durch $E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit $0 < a < b$. Sei K_x der Körper der entsteht durch Rotation von E um die x -Achse und sei K_y der Körper der entsteht durch Rotation von E um die y -Achse.

- Die Rotationskörper K_x und K_y sind identisch
- K_x ist nicht gleich K_y aber das Volumen von K_x ist gleich dem Volumen von K_y
- Das Volumen von K_x ist kleiner als das Volumen von K_y
- ✓ Das Volumen von K_y ist kleiner als das Volumen von K_x

Wenn man die Formel für das Ellipsoidvolumen kennt ist diese Frage leicht zu beantworten, man kann's aber auch ohne! Stelle dich b viel grösser vor als a , so gleicht der Körper K_y eine lange dünne Spaghetti. Der Körper K_x ist aber eher wie ein grosser flacher Pfannkuchen, der die Spaghetti enthält und damit ist die Antwort klar!

Frage 45

Der Meter (siehe Figur) ist im Gleichgewicht.



Wo muss man die 2 Newton auf dem Meter platzieren?

- Bei 10 cm
- Bei 20 cm
- ✓ Bei 30 cm
- Bei 70 cm

Für ein Gleichgewicht gilt

$$\sum_{i=1}^N m_i \cdot (x_i - x_S) = 0$$

wobei hier $x_s = 50\text{cm}$, $N = 3$, $x_1 = 60\text{cm}$, $x_2 = 80\text{cm}$, $m_1 = m_2 = 1\text{N}$ und $m_3 = 2\text{N}$. Also (ohne Einheiten) lautet die Gleichung

$$1 \cdot (60 - 50) + 1 \cdot (80 - 50) + 2 \cdot (x_3 - 50) = 0$$

und daraus folgt $x_3 = 30$.

Frage 46

Ein Stab AB der Länge L hat eine inhomogene Dichte $\rho(x) = \frac{Kx}{L}$ für eine Materialkonstante K , wobei x der Distanz zu A ist gemessen entlang des Stabes. Der Distanz vom Schwerpunkt zu A ist

- $\frac{L}{3}$
- $\frac{L}{2}$
- $\frac{3L}{5}$
- ✓ $\frac{2L}{3}$
- $\frac{3L}{4}$

Die Formel für den Schwerpunkt im 1-dimensionalen Fall ist

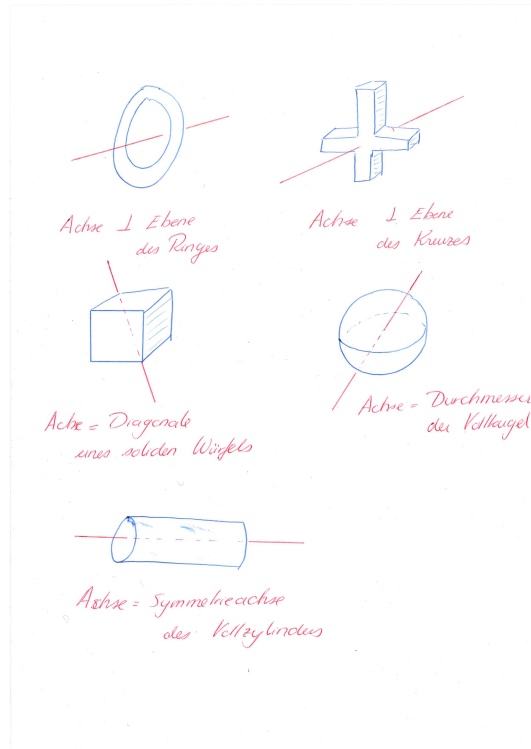
$$x_S = \frac{\int_0^L x \cdot \rho(x) dx}{\int_0^L \rho(x) dx}$$

Durch einsetzen und ausrechnen erhalten wir

$$x_S = \frac{\int_0^L x \cdot \frac{Kx}{L} dx}{\int_0^L \frac{Kx}{L} dx} = \frac{\frac{K}{L} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^L}{\frac{K}{L} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^L} = \frac{2L}{3}$$

Frage 47

Die folgende fünf Körper haben alle die gleiche Masse und die gleiche homogene Dichte. Welcher hat das grösste Trägheitsmoment?



- Das Kreuz
- ✓ Der Ring
- Der solide Würfel
- Die Vollkugel
- Der Vollzylinder

Da im Trägheitsmoment sowohl die Masse wie auch die Entfernung zur Achse eine Rolle spielen und alle Körper in diesem Fall die gleiche Masse haben, geht's hier um die Entfernung. Ohne genau nachzurechnen, ist es klar dass beim Ring "am meiste Masse weit weg von der Achse ist" deshalb hat der Ring das grösste Trägheitsmoment (diese Frage ist aber etwas ungenau solange man keine genaue Distanzen angibt - sie ist aber rein intuitiv gemeint).