MC-Serie 5 - Funktionen I

1. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

i) Es existiert eine Injektion $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 6 = 0\} \cup \{0, 1\} \to \{x \in \mathbb{N} \mid 10 < x^2 < 100\}$.

ii) Es existiert eine Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ (hier ist $0 \in \mathbb{N}$).

iii) Es existiert eine Injektion $\mathbb{N} \to \{x \in [-1000, 1000] \mid \sin(x) = 0\}$.

iv) Es existiert eine Injektion $\mathbb{N} \to [0, 1/2]$.

v) weiss ich nicht

2. Was ist die geometrische Bedeutung der Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon (x, y) \mapsto (y, x)$?

i) Drehung um π.

ii) Spiegelung an der x-Achse.

iii) Spiegelung an der y-Achse.

iv) Drehung um $\pi/2$ gegen den Uhrzeigersinn.

v) Spiegelung an der Geraden $x = y$.

vi) Drehung um $\pi/2$ im Uhrzeigersinn.

vii) weiss ich nicht

3. Welche der folgenden Teilmengen sind Graphen von Funktionen?

i) Nur (a) und (b).

ii) Nur (c) und (d).

iii) Nur (a) und (d).

iv) Nur (a).

v) Nur (a), (c) und (d).

vi) weiss ich nicht

4. Zwischenprüfung Winter 2014. Bestimmen Sie die Inverse von $f(x) = \frac{1}{1+ae^x}$ mit $a > 0$ und deren maximalen Definitionsbereich.

i) $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1-x}{ax}\right)$, $x \in (0, \infty)$

ii) $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1-x}{ax}\right)$, $x \in \mathbb{R}$

iii) $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1-x}{ax}\right)$, $x \in (0, 1)$

iv) $f^{-1}(x) = 1 + ae^x$, $x \in \mathbb{R}$

v) weiss ich nicht

5. Welche der folgenden Funktionen $]-1,1[\to \mathbb{R}$ sind streng monoton wachsend?

i) $x \mapsto |x| + x$
ii) $x \mapsto e^x$
iii) $x \mapsto x^2$
iv) $x \mapsto x^3 - x$
v) $x \mapsto \arccos x$
vi) keine
vii) weiss ich nicht

6. Zwischenprüfung Winter 2014. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Bedingungen ist ***nicht*** hinreichend um zu garantieren, dass f eine Inverse hat?

i) f ist symmetrisch bezüglich des Ursprungs.
ii) f ist streng monoton wachsend und surjektiv.
iii) $f(x) = ax^3, a \neq 0$.
iv) f ist bijektiv.
v) weiss ich nicht

7. Die auf allen reellen Zahlen definierten Funktionen f und g seien ungerade. Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

i) Die Funktion $f \cdot g$ ist ungerade.
ii) Die Funktion $f/g \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ ist gerade (hier wird $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \colon g(x) \neq 0$ angenommen).
iii) Die Funktion $f - g$ ist ungerade.
iv) Die Funktion $f + g$ ist ungerade.
v) weiss ich nicht

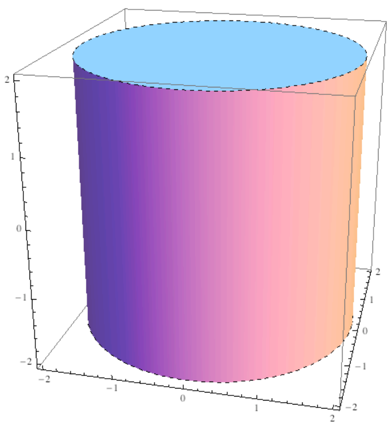
8. Gegeben seien vier Funktionen $f_i : D_i \to Z_i, i = 1,2,3,4$. Welches f_i besitzt *keine* Umkehrfunktion $f^{-1} : Z_i \to D_i$?

i) $f_1 : [-2,2] \to [-16,16],\ x \mapsto x^3 - 12x$
ii) $f_2 : [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \to [-1,1],\ x \mapsto \sin x$
iii) $f_3 : [1,4] \to [1,16], x \mapsto x^2$
iv) $f_4 : [2,4] \to [-16,24], x \mapsto x^3 - 12x$
v) Alle besitzen eine Umkehrfunktion.
vi) weiss ich nicht

9. Gegeben sei der Punkt $(r, \varphi, \vartheta) = (2, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ in Kugelkoordinaten (für die Definition siehe Vorlesungsnotizen). Welchem Punkt entspricht er in kartesischen Koordinaten?

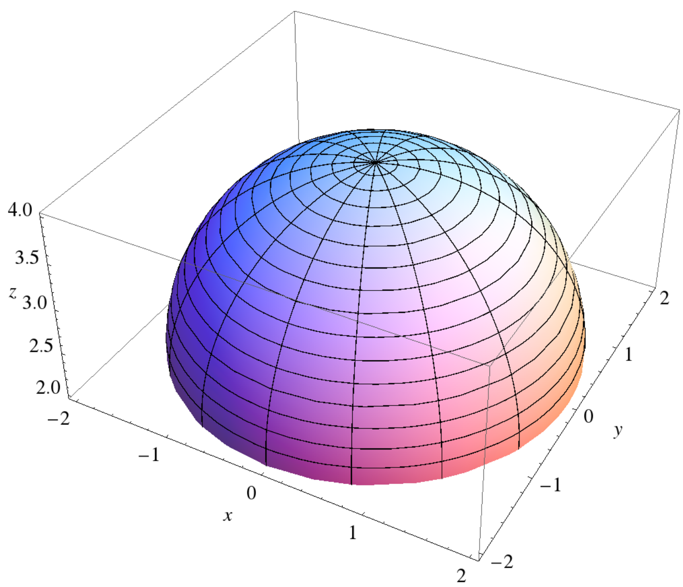
i) $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{3})$.
ii) $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{3})$.
iii) $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{3})$.
iv) $(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$.
v) weiss ich nicht

10. *(Kugelkoordinaten)* Welche Parametrisierung passt zu dieser Zeichnung?



i) $\left\{(r,\varphi,\vartheta) : r = 4\cos\vartheta, 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}\right\}$.
ii) $\left\{(r,\varphi,\vartheta) : r = \frac{2}{\cos\vartheta}, 0 \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}\right\}$.
iii) $\left\{(r,\varphi,\vartheta) : r = \frac{2}{\sin\vartheta}, 0 < \vartheta < \pi\right\}$.
iv) $\{(r,\varphi,\vartheta) : 1 \leq r \leq 3\}$.
v) weiss ich nicht

11. *(Kugelkoordinaten)* Welche Parametrisierung passt zu dieser Zeichnung?



i) $\left\{(r,\varphi,\vartheta) : r = \frac{2}{\cos\vartheta}, 0 \le \vartheta < \frac{\pi}{2}\right\}$.

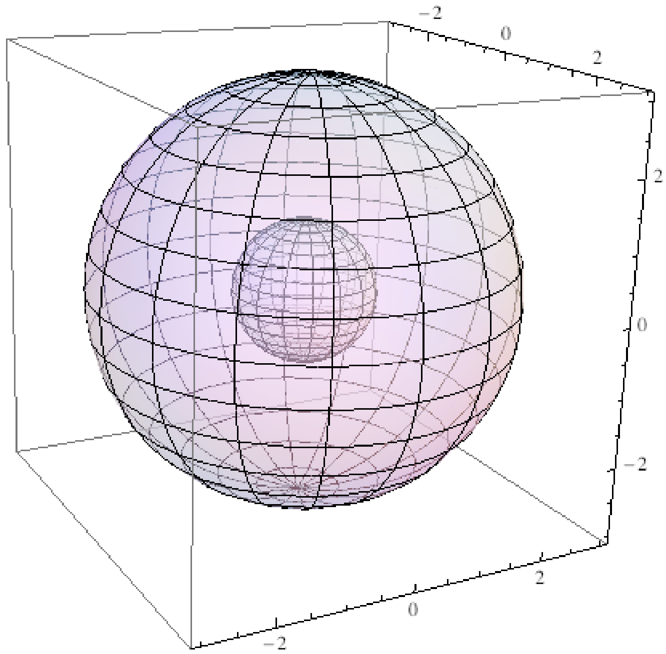
ii) $\left\{(r,\varphi,\vartheta) : r = 4\cos\vartheta, 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{4}\right\}$.

iii) $\left\{(r,\varphi,\vartheta) : r = \frac{2}{\sin\vartheta}, 0 < \vartheta < \pi\right\}$.

iv) $\{(r,\varphi,\vartheta) : 1 \le r \le 3\}$.

v) weiss ich nicht

12. *(Kugelkoordinaten)* Welche Parametrisierung passt zu dieser Zeichnung?



i) $\left\{(r,\varphi,\vartheta) : r = 4\cos\vartheta, 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{4}\right\}$.

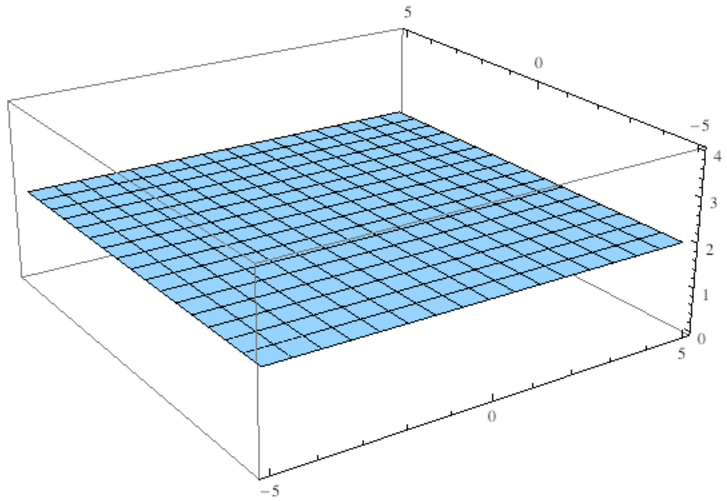
ii) $\left\{(r,\varphi,\vartheta) : r = \frac{2}{\sin\vartheta}, 0 < \vartheta < \pi\right\}$.

iii) $\left\{(r,\varphi,\vartheta) : r = \frac{2}{\cos\vartheta}, 0 \le \vartheta < \frac{\pi}{2}\right\}$.

iv) $\{(r,\varphi,\vartheta) : 1 \le r \le 3\}$.

v) weiss ich nicht

13. *(Kugelkoordinaten)* Welche Parametrisierung passt zu dieser Zeichnung?



i) $\left\{(r,\varphi,\vartheta) : r = 4\cos\vartheta, 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}\right\}$.

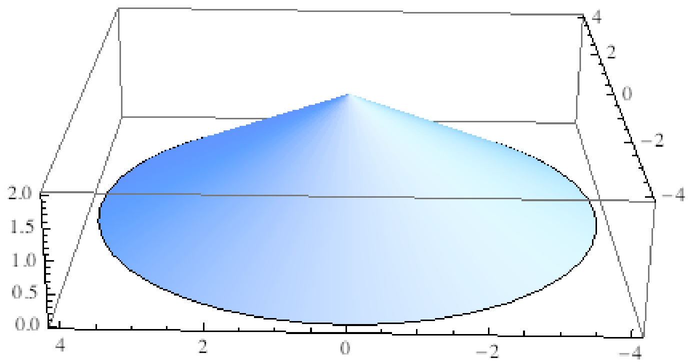
ii) $\left\{(r,\varphi,\vartheta) : r = \frac{2}{\sin\vartheta}, 0 < \vartheta < \pi\right\}$.

iii) $\left\{(r,\varphi,\vartheta) : r = \frac{2}{\cos\vartheta}, 0 \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}\right\}$.

iv) $\{(r,\varphi,\vartheta) : 1 \leq r \leq 3\}$.

v) weiss ich nicht

14. *(Zylinderkoordinaten)* Welche Parametrisierung passt zu dieser Zeichnung?



i) $\left\{(r,\varphi,z) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}, 0 \leq z \leq 1\right\}$.

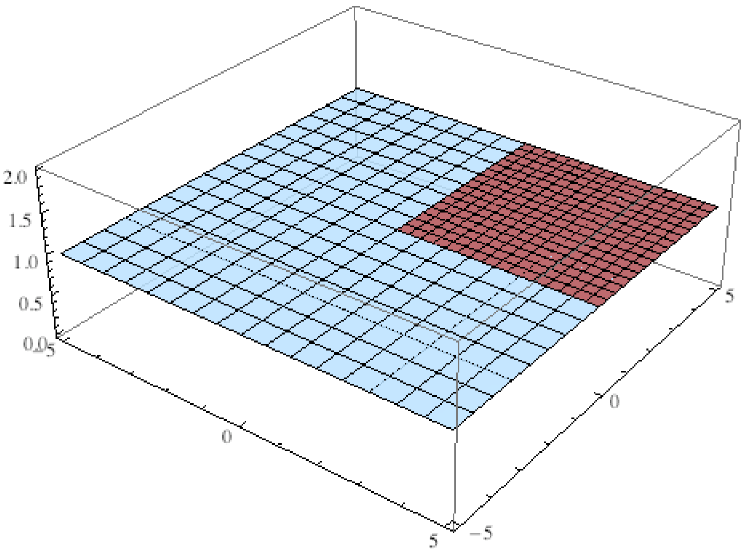
ii) $\{(r,\varphi,z) : 2r \leq z \leq 4\}$.

iii) $\left\{(r,\varphi,z) : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, z = 1\right\}$.

iv) $\left\{(r,\varphi,z) : 0 \leq z \leq 2 - \frac{r}{2}\right\}$.

v) weiss ich nicht

15. *(Zylinderkoordinaten)* Welche Parametrisierung passt zu dieser Zeichnung?



i) $\left\{(r, \varphi, z) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}, 0 \leq z \leq 1\right\}$.

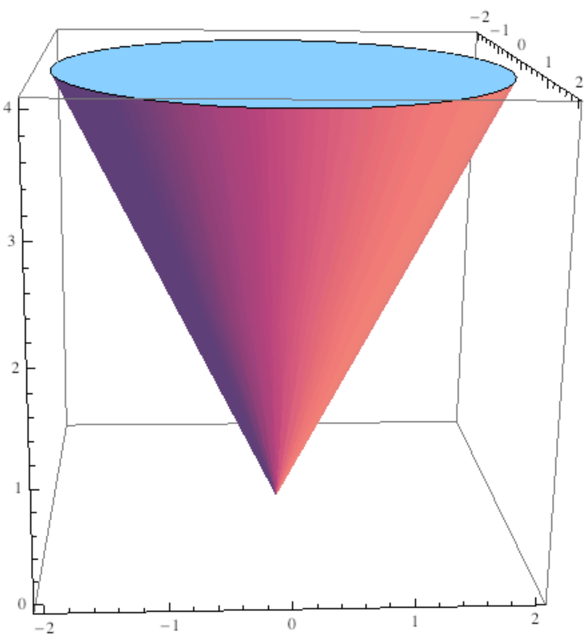
ii) $\{(r, \varphi, z) : 2r \leq z \leq 4\}$.

iii) $\left\{(r, \varphi, z) : 0 \leq z \leq 2 - \frac{r}{2}\right\}$.

iv) $\left\{(r, \varphi, z) : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, z = 1\right\}$.

v) weiss ich nicht

16. *(Zylinderkoordinaten)* Welche Parametrisierung passt zu dieser Zeichnung?



i) $\left\{(r, \varphi, z) : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, z = 1\right\}$.

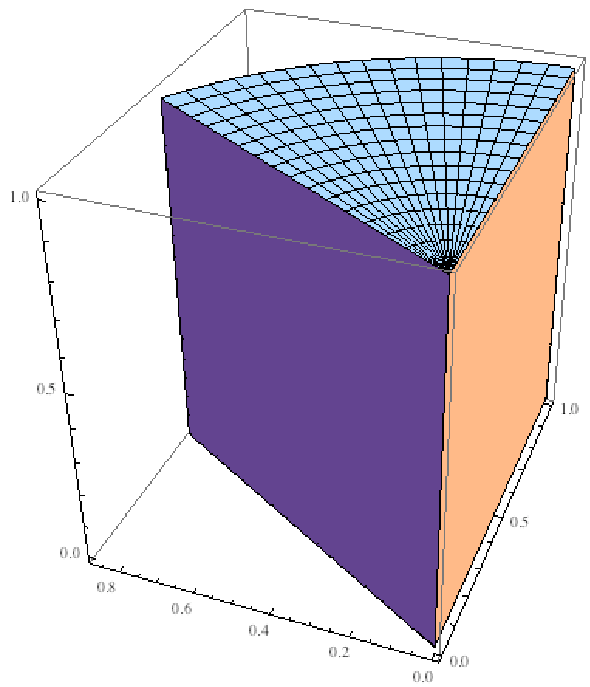
ii) $\left\{(r,\varphi,z) : 0 \le z \le 2 - \frac{r}{2}\right\}$.

iii) $\{(r,\varphi,z) : 2r \le z \le 4\}$.

iv) $\left\{(r,\varphi,z) : 0 \le r \le 1, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}, 0 \le z \le 1\right\}$.

v) weiss ich nicht

17. *(Zylinderkoordinaten)* Welche Parametrisierung passt zu dieser Zeichnung?



i) $\{(r,\varphi,z) : 2r \le z \le 4\}$.

ii) $\left\{(r,\varphi,z) : 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, z = 1\right\}$.

iii) $\left\{(r,\varphi,z) : 0 \le z \le 2 - \frac{r}{2}\right\}$.

iv) $\left\{(r,\varphi,z) : 0 \le r \le 1, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}, 0 \le z \le 1\right\}$.

v) weiss ich nicht