Analysis D-BAUG
Dr. Meike Akveld HS 2015

MC-Serie 13 - Anwendungen der Integralrechnung I

1. Eine geschlossene Kurve $[0,1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto (x(t), y(t))$ wird um den Faktor $a > 0$ gestreckt, das heisst, man erhält eine neue Kurve $[0,1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto (ax(t), ay(t))$. Welche Aussage über die Bogenlänge ist wahr?

i) Die Bogenlänge der neuen Kurve ist das a-te Vielfache der Bogenlänge der alten Kurve.

ii) Die Bogenlänge der neuen Kurve ist das $\sqrt{a}$-te Vielfache der Bogenlänge der alten Kurve.

iii) Die Bogenlänge der neuen Kurve ist das a^2-te Vielfache der Bogenlänge der alten Kurve.

iv) weiss ich nicht

2. Eine geschlossene Kurve $[0,1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto (x(t), y(t))$ wird um den Faktor $a > 0$ gestreckt, das heisst, man erhält eine neue Kurve $[0,1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto (ax(t), ay(t))$. Welche über die eingeschlossene Fläche ist wahr?

i) Die eingeschlossene Fläche der neuen Kurve ist das $\sqrt{a}$-te Vielfache der eingeschlossenen Fläche der alten Kurve.

ii) Die eingeschlossene Fläche der neuen Kurve ist das a-te Vielfache der eingeschlossenen Fläche der alten Kurve.

iii) Die eingeschlossene Fläche der neuen Kurve ist das a^2-te Vielfache der eingeschlossenen Fläche der alten Kurve.

iv) weiss ich nicht

3. Wir bezeichnen für $i = 1, 2$ mit K_i den Rotationskörper, der durch Rotation einer nichtnegativen stetigen Funktion $f_i\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ an der x-Achse entsteht. Welche Aussagen sind wahr?

i) Falls für ein $a > 0$ und für alle $t \in [0,1]$ gilt $f_1(t) = af_2(t)$, gilt $\mathrm{vol}(K_1) = a\mathrm{vol}(K_2)$.

ii) Falls für ein $a > 0$ und für alle $t \in [0,1]$ gilt $f_1(t) = af_2(t)$, gilt $\mathrm{vol}(K_1) = a^3\mathrm{vol}(K_2)$.

iii) Falls für ein $a > 0$ und für alle $t \in [0,1]$ gilt $f_1(t) = af_2(t)$, gilt $\mathrm{vol}(K_1) = a^2\mathrm{vol}(K_2)$.

iv) weiss ich nicht

4. Wir bezeichnen für $i = 1, 2$ mit K_i den Rotationskörper, der durch Rotation einer nichtnegativen stetigen Funktion $f_i\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ an der x-Achse entsteht. Welche Aussagen sind wahr?

i) Der Rotationskörper, der entsteht, wenn man f_1 und f_2 addiert und rotiert, hat Volumen $\mathrm{vol}(K_1) + \mathrm{vol}(K_2)$.

ii) Falls f_1 und f_2 dasselbe Integral haben, haben K_1 und K_2 dasselbe Volumen.

iii) Falls für alle $t \in [0, 1]$ gilt $f_1(t) \leq f_2(t)$, gilt $\mathrm{vol}(K_1) \leq \mathrm{vol}(K_2)$.

iv) Der Rotationskörper, der entsteht, wenn man f_1 und f_2 multipliziert und rotiert, hat Volumen $\mathrm{vol}(K_1) \cdot \mathrm{vol}(K_2)$.

v) weiss ich nicht

5. Gegeben sei die Parameterdarstellung einer Astroide:

$$\begin{aligned} x(t) &= a\cos^3 t \\ y(t) &= a\sin^3 t \quad a > 0\,,\ \ 0 \leq t \leq 2\pi \end{aligned}$$

Berechnen Sie das Volumen V des Rotationskörpers, der entsteht, wenn die Astroide um die x-Achse gedreht wird.

i) $V = \frac{16}{105}a^4\pi$

ii) $V = \frac{8}{57}a^2\pi$

iii) $V = \frac{8}{57}a^3\pi$

iv) $V = \frac{32}{105}a^3\pi$

v) $V = \frac{32}{105}a^4\pi$

vi) weiss ich nicht

6. Die Kurve, gegeben durch

$$(x(t), y(t)) = e^{-t}\left(\cos(2t), \sin(2t)\right) \quad , \ \ 0 \leq t \leq \pi/2$$

rotiert um die x-Achse.
Welche Oberfläche O entsteht?

i) $O = \frac{\sqrt{5}}{4}\pi(e^{-\pi} + 1)$

ii) $O = \frac{\sqrt{5}}{2}\pi(e^{-\pi} + 1)$

iii) $O = \pi(e^{-\pi} - 1)$

iv) $O = \frac{\sqrt{5}}{2}\pi(e^{-\pi} - 1)$

v) $O = \frac{\sqrt{5}}{4}\pi(e^{-\pi} - 1)$

vi) weiss ich nicht

7. Zwischenprüfung Winter 2015. Gegeben sei eine Kurve $r\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2, r(t) = \binom{x(t)}{y(t)}$. Betrachte die Fläche A, die von der Kurve r, der y-Achse und den beiden horizontalen Geraden durch $r(0)$ und $r(1)$ begrenzt wird. Wir rotieren nun diese Fläche um die x-Achse. Wie gross ist das Volumen des so erzeugten Rotationskörpers?

i) $2\pi \int_0^1 x(t)y(t)y'(t)\,\mathrm{d}t$

`pa25.{ps,eps,pdf}` not found (or no BBox)

ii) $2\pi \int_0^1 x(t)y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t$

iii) $2\pi \int_0^1 y^2(t)x'(t)\,\mathrm{d}t$

iv) $2\pi \int_0^1 y^2(t)x(t)\,\mathrm{d}t$

v) weiss ich nicht