Analysis D-BAUG
Dr. Meike Akveld HS 2015

Lösung: MC-Serie 2 - Komplexe Zahlen I

1. Repetition. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

i) ✗ $\log_4(64) = 4$

ii) ✓ $\log_2(\frac{1}{8}) = -3$

iii) ✓ $\log_4(2) = \frac{1}{2}$

iv) ✗ $\log_2(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung Es gilt $\log_4(64) = 3$ und $\log_2(\frac{1}{4}) = -2$.

2. Repetition. Welche der folgenden Gleichungen gelten für alle $a > 1, x > 0$?

i) ✗ $\log_{a^2}(x) = 2\log_a(x)$

ii) ✗ $\log_{a^2}(x) = \log_a(x^2)$

iii) ✗ $\log_{a^2}(x) = \log_a(x)^2$

iv) ✓ $\log_{a^2}(x) = \frac{1}{2}\log_a(x)$

v) ✓ $\log_{a^2}(x) = \log_a(\sqrt{x})$

vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung

Es gilt

$$\log_{a^2}(x) = y \Leftrightarrow x = (a^2)^y \Leftrightarrow x = a^{2y} \Leftrightarrow \log_a(x) = 2y$$

und folglich

$$\log_{a^2}(x) = \tfrac{1}{2}\log_a(x) = \log_a(\sqrt{x}).$$

Alternative:

$$\log_{a^2}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a^2)} = \frac{\ln(x)}{2\ln(a)} = \tfrac{1}{2}\log_a(x) = \log_a(\sqrt{x})$$

3. Sei z in der oberen Halbebene. Welche der folgenden Zahlen sind dann ebenfalls in der oberen Halbebene?

i) ✓ $-\frac{1}{z}$

ii) ✗ $\bar{z}$

iii) ✗ $-\frac{1}{\bar{z}}$

iv) ✗ $\frac{1}{z}$

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Die obere Halbebene ist charakterisiert durch $\operatorname{Im}(z) > 0$ und analog ist die untere Halbebene durch $\operatorname{Im}(z) < 0$ gegeben. Zunächst gilt $\operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im}(z)$ und $\operatorname{Im}(1/z) = \operatorname{Im}(\bar{z}/z\bar{z}) = -\operatorname{Im}(z)/|z|^2$. Daraus folgen auch die restlichen benötigten Beziehungen.

4. Was ist die geometrische Bedeutung der Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto -\mathbf{i}z$?

i) ✗ Spiegelung an der x-Achse.

ii) ✗ Spiegelung an der y-Achse.

iii) ✗ Drehung um $\frac{\pi}{2}$ gegen den Uhrzeigersinn.

iv) ✓ Drehung um $\frac{\pi}{2}$ im Uhrzeigersinn.

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung Für $z = x + \mathbf{i}y$ haben wir $-\mathbf{i}z = y - \mathbf{i}x$. Dies entspricht einer Drehung im Uhrzeigersinn um 90°.

5. Für die komplexe Zahl $z = (3 + 2\mathbf{i})^3$ gilt

i) ✗ $z = -9 - 46\mathbf{i}$.

ii) ✓ $z = -9 + 46\mathbf{i}$.

iii) ✗ $z = -9 + 10\mathbf{i}$.

iv) ✗ $z = 27 + 8\mathbf{i}$.

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung Für alle $w, z \in \mathbb{C}$ gilt die binomische Formel $(w + z)^3 = w^3 + 3w^2z + 3wz^2 + z^3$. In unserem Fall liefert das

$$\begin{aligned} z &= 3^3 + 3 \cdot 3^2 \cdot (2\mathbf{i}) + 3 \cdot 3 \cdot (2\mathbf{i})^2 + (2\mathbf{i})^3 \\ &= -9 + 46\mathbf{i}. \end{aligned}$$

6. Für die komplexe Zahl $z = \frac{3+2\mathbf{i}}{4-\mathbf{i}}$ gilt

i) ✗ $z = \frac{5+14\mathbf{i}}{17}$.

ii) ✗ $z = \frac{17}{8\mathbf{i}+2}$.

iii) ✓ $z = \frac{10+11\mathbf{i}}{17}$.

iv) ✗ $z = \frac{14+5\mathbf{i}}{17}$.

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung Durch Erweitern mit dem komplex Konjugierten des Nenners erhält man

$$\begin{aligned} z &= \frac{(3+2\mathbf{i})(4+\mathbf{i})}{(4-\mathbf{i})(4+\mathbf{i})} \\ &= \frac{(3+2\mathbf{i})(4+\mathbf{i})}{4^2+1^2} \\ &= \frac{10+11\mathbf{i}}{17}. \end{aligned}$$

7. Die Mengen $M_1, M_2 \subset \mathbb{C}$ seien definiert durch

$$M_1 = \{z_1 \in \mathbb{C} \mid (\mathrm{Re}(z_1) \geq 0) \wedge (\mathrm{Im}(z_1) \in [0, e))\}$$

und

$$M_2 = \{z_2 \in \mathbb{C} \mid (\mathrm{Re}(z_2) \in (0, 2]) \wedge (\mathrm{Im}(z_2) \in [0, 2])\}.$$

Für eine komplexe Zahl z gilt: $z \in M_1 \cap M_2$ genau dann, wenn

i) ✗ $(z \in \mathbb{R}) \wedge (z \leq 2)$.

ii) ✓ $(\mathrm{Re}(z) \in (0, 2]) \ \wedge \ (\mathrm{Im}(z) \in [0, 2])$.

iii) ✗ $|z - \mathbf{i}| \leq 2$.

iv) ✗ $(|z| \leq 2) \ \wedge \ (\mathrm{Re}(z) \in (0, 2]) \ \wedge \ (z \neq 0)$.

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung Man muss lediglich jeweils die Bereiche für den Real- bzw. Imaginärteil schneiden. Dabei sieht man sofort, dass $M_2 \subset M_1$ gilt. Wir erhalten also $M_1 \cap M_2 = M_2$.

8. Welche der folgenden Inklusionen ist wahr?

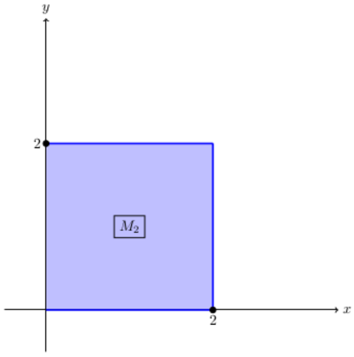
i) ✗ $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \cdot \mathrm{Im}(z) > 0\} \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) > 0\}$

ii) ✗ $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z) > 0\} \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(-z) - \mathrm{Im}(-z) > 0\}$

iii) ✗ $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z \cdot \mathbf{i}) > \mathrm{Im}(z)\} \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > \mathrm{Re}(z)\}$

iv) ✓ $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z \cdot \mathbf{i}) > \mathrm{Re}(z)\} \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) < -\mathrm{Im}(z)\}$

v) ✗ weiss ich nicht



Lösung

Für eine beliebige komplexe Zahl $z = a + \mathbf{i}b$ gilt

$$\mathrm{Re}(z \cdot \mathbf{i}) = \mathrm{Re}((a + \mathbf{i}b) \cdot \mathbf{i}) = \mathrm{Re}(a\mathbf{i} - b) = -b = -\mathrm{Im}(z).$$

Die erste Inklusion ist falsch, denn zum Beispiel liegt $z = -1 - \mathbf{i}$ in der linken Menge, jedoch nicht in der rechten.

Bei der zweiten wie auch bei der dritten Inklusion liegt zum Beispiel $z = 1$ in der linken Menge, jedoch nicht in der rechten.

Die letzten beiden Mengen sind sogar gleich.

9. Für jede komplexe Zahl $z = x + \mathbf{i}y$ gilt $z \cdot \bar{z} =$

i) ✗ $|z|$.

ii) ✓ $x^2 + y^2$.

iii) ✗ $x^2 - y^2$.

iv) ✗ $x^2 + \mathbf{i}y^2$.

v) ✗ der Distanz von z zum Ursprung.

vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung Es gilt

$$(x + \mathbf{i}y)(x - \mathbf{i}y) = x^2 + \mathbf{i}xy - \mathbf{i}xy - \mathbf{i}^2y^2 = x^2 + y^2.$$

Somit ist die zweite Antwort richtig und die dritte und vierte falsch. Die erste und fünfte Antwort sind ebenfalls falsch wegen

$$\text{Distanz von } z \text{ zum Ursprung } = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

10. Für jede komplexe Zahl $z = x + \mathbf{i}y$ gilt Re(z) $=$

i) ✗ $\frac{z-\bar{z}}{2}$.

ii) ✗ $\frac{z\cdot\bar{z}}{2}$.

iii) ✓ $\frac{z+\bar{z}}{2}$.

iv) ✗ $z + \bar{z}$.

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung Es gilt $z + \bar{z} = x + \mathbf{i}y + x - \mathbf{i}y = 2x = 2 \cdot \text{Re(z)}$.

11. Zwischenprüfung Winter 2014. Die Punktemenge $\{z \in C \mid |z| = \text{Im}(z) + 1\}$ ist ...

i) ✗ eine Gerade.

ii) ✗ eine Ellipse.

iii) ✓ eine Parabel.

iv) ✗ eine Hyperbel.

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung Für $z = x + iy$ gilt $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\text{Im}(z) + 1 = y + 1$. Die Menge ist also gegeben durch

$$\sqrt{x^2 + y^2} = y + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = y^2 + 2y + 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2}(x^2 - 1).$$

Diese Gleichung beschreibt eine Parabel.

12. Zwischenprüfung Winter 2014. Die schwarzen Punkte in der unten stehenden Figur entsprechen den Lösungen der Gleichung ...

i) ✗ $z^6 = \frac{1}{2}$.

ii) ✗ $z^6 = \frac{1}{64}$.

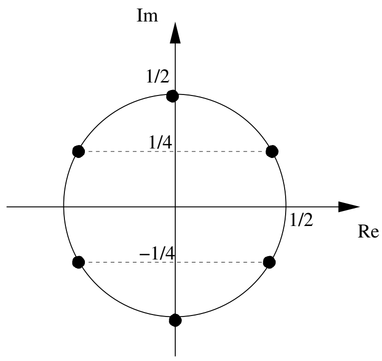
iii) ✓ $z^6 = -\frac{1}{64}$.

iv) ✗ $z^8 = \frac{1}{256}$.

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung Alle falschen Gleichungen besitzen eine reelle Lösung.

13. Zwischenprüfung Winter 2014. Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = \sqrt{3} - \mathbf{i}$ und $z_2 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} - \mathbf{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. Welche Aussagen über $z = \frac{z_1}{z_2}$ sind korrekt?



i) ✗ $|z| = 4$ und $\arg(z) = -\frac{5\pi}{6}$

ii) ✓ $|z| = 4$ und $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$

iii) ✗ $|z| = 1$ und $\arg(z) = -\frac{5\pi}{6}$

iv) ✗ $|z| = 1$ und $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$

v) ✗ z ist nicht eindeutig bestimmt, da z_2 nicht reell ist.

vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung Wir schreiben z_1 und z_2 in Polarform. Es gilt $\arg(z_1) = \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$ und $|z_1| = 2$. Weiter sehen wir direkt, dass $\arg(z_2) = -\frac{2\pi}{3}$ und $|z_2| = \frac{1}{2}$. Damit folgt $\arg(z) = \arg(z_1) - \arg(z_2) = \frac{\pi}{2}$ und $|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = 4$.