Analysis D-BAUG
Dr. Meike Akveld HS 2015

MC-Serie 3 - Komplexe Zahlen II

1. Der Realteil der komplexen Zahl $\exp(-\mathbf{i})$ beträgt

i) ✗ 0.
ii) ✗ 1.
iii) ✗ $\sin(1)$.
iv) ✓ $\cos(1)$.
v) ✗ Keine der obigen Antworten ist richtig.
vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung

Laut Definition gilt $\exp(\mathbf{i}(-1)) = \cos(-1) + \mathbf{i}\sin(-1)$.

Ausserdem gilt für alle reellen Zahlen x, dass $\cos(-x) = \cos(x)$.

2. Zwischenprüfung Winter 2015. Es seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $|z_1| < 1$ und $|z_2| < 1$, so gilt für den Betrag der Summe:

i) ✗ $|z_1 + z_2| < 1$.
ii) ✗ $|z_1 + z_2| > 1$.
iii) ✗ $|z_1 + z_2| = 1$.
iv) ✓ alle drei obigen Fälle kommen vor.
v) ✗ weiss ich nicht

Lösung Zum Beispiel gilt

$$|\tfrac{\mathbf{i}}{4} + \tfrac{\mathbf{i}}{4}| = \tfrac{1}{2} < 1,$$
$$|\tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{4}| = \tfrac{3}{2} > 1,$$
$$|\tfrac{\mathbf{i}}{2} + \tfrac{\mathbf{i}}{2}| = 1.$$

3. Sei $z = 2\exp\left(\frac{\pi}{6}\mathbf{i}\right) \cdot (5\sqrt{3} + b \cdot \mathbf{i})$. Für welches $b \in \mathbb{R}$ ist z eine reelle Zahl?

i) ✗ $\frac{1}{5\sqrt{3}}$
ii) ✗ $\sqrt{3}$
iii) ✗ $5\sqrt{3}$
iv) ✗ $\frac{1}{\sqrt{3}}$
v) ✓ Keines von diesen.
vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung Es gilt

$$\begin{aligned} z &= 2\exp\left(\frac{\pi}{6}\mathbf{i}\right)\cdot(5\sqrt{3}+b\cdot\mathbf{i}) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathbf{i}\right)\cdot(5\sqrt{3}+b\mathbf{i}) \\ &= 15+b\sqrt{3}\mathbf{i}+5\sqrt{3}\mathbf{i}-b = (15-b)+\mathbf{i}\cdot(b\sqrt{3}+5\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Die Zahl ist reell, wenn der Imaginärteil verschwindet, und dies ist für $b=-5$ der Fall, welches unter den Antworten nicht auftaucht.

4. Zwischenprüfung Winter 2015. Seien $z, w \in \mathbb{C}$ zwei komplexe Zahlen im Innern des ersten Quadranten der komplexen Ebene, so gilt:

i) ✓ $\operatorname{Im}\left(\frac{z}{\overline{w}}\right) > 0$ und $\operatorname{Re}(z\overline{w}) > 0$.

ii) ✗ $\operatorname{Im}\left(\frac{z}{\overline{w}}\right) < 0$ und $\operatorname{Re}(z\overline{w}) > 0$.

iii) ✗ $\operatorname{Im}\left(\frac{z}{\overline{w}}\right) > 0$ und $\operatorname{Re}(z\overline{w}) < 0$.

iv) ✗ $\operatorname{Im}\left(\frac{z}{\overline{w}}\right) < 0$ und $\operatorname{Re}(z\overline{w}) < 0$.

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung Punkte im ersten Quadrant haben positiven Real- und Imaginärteil, also $z = x+\mathbf{i}y$ und $w = u+\mathbf{i}v$ für $x, y, u, v > 0$. Folglich gilt

$$\begin{aligned} \frac{z}{\overline{w}} &= \frac{zw}{\overline{w}w} = \frac{ux-vy+\mathbf{i}(uy+vx)}{u^2+v^2} \\ &\Rightarrow \operatorname{Im}(\tfrac{z}{\overline{w}}) = \frac{uy+vx}{u^2+v^2} > 0, \\ z\overline{w} &= ux+vy+\mathbf{i}(uy-vx) \\ &\Rightarrow \operatorname{Re}(z\overline{w}) = ux+vy > 0. \end{aligned}$$

5. Sei z der Punkt auf dem Einheitskreis mit Argument φ. Wenn z entlang des Einheitskreises im Uhrzeigersinn wandert und den Wert -1 vermeidet, dann ist $\tan(\varphi/2)$

i) ✗ monoton wachsend

ii) ✓ monoton fallend

iii) ✗ abhängig von z wachsend oder fallend

iv) ✗ weiss ich nicht

Lösung

Im Uhrzeigersinn fällt φ streng monoton.

Mit dem Wert $z = -1$ werden auch alle Werte $\varphi = \pi + 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ vermieden. Also vermeidet $\varphi/2$ alle Werte $\pi/2 + k\pi$, an denen die Tangensfunktion nicht definiert ist. Somit bleibt $\varphi/2$ in einem Teilintervall $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$, auf dem der Tangens definiert und streng monoton wachsend ist.

Da $\varphi/2$ streng monoton fällt, ist $\tan(\varphi/2)$ ebenfalls streng monoton fallend.

6. Welches sind Lösungen der Gleichung $z^3 = 2(\mathbf{i} - 1)$?

i) ✓ $1 + \mathbf{i}$
ii) ✗ Keine davon.
iii) ✓ $\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + \mathbf{i}\sin\frac{11\pi}{12}\right)$
iv) ✗ $1 - \mathbf{i}$
v) ✓ $\sqrt{2}\left(\cos\frac{-5\pi}{12} + \mathbf{i}\sin\frac{-5\pi}{12}\right)$
vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Der Betrag von $2\,(\mathbf{i} - 1)$ ist $\sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2^{\frac{3}{2}}$. In der komplexen Ebene liegt diese Zahl auf der Gegendiagonalen $x = -y$ und hat daher als Argument $\frac{3\pi}{4}$. Es folgt

$$|z|^3 = |z^3| = 2^{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow |z| = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

Für das Argument ergibt sich

$$3\arg(z) = \arg(z^3) = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi \quad \Rightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{4} + \frac{k \cdot 2\pi}{3}.$$

Daraus folgen die Lösungen

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \mathbf{i} \\
z_2 &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + \mathbf{i}\sin\frac{11\pi}{12}\right) \\
z_3 &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + \mathbf{i}\sin\frac{19\pi}{12}\right) \\
&= \sqrt{2}\left(\cos\frac{-5\pi}{12} + \mathbf{i}\sin\frac{-5\pi}{12}\right)
\end{aligned}$$

7. Sei $z = \sqrt{2 + \sqrt{2}} + \mathbf{i}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$. Dann ist z^6 gleich

i) ✗ $-32(\mathbf{i}\sqrt{2} - \sqrt{2})$.
ii) ✗ $64(\mathbf{i}\sqrt{2} - \sqrt{2})$.
iii) ✓ $64\exp(\mathbf{i}\frac{3}{4}\pi)$.
iv) ✗ $64\exp(\mathbf{i}\frac{3}{2}\pi)$.

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung Um uns die Arbeit zu erleichtern, verwenden wir, dass $z^6 = (z^2)^3$. Wir berechnen zuerst z^2 mit Hilfe der binomischen Formel,

$$
\begin{aligned}
z^2 &= \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + \mathbf{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2 + 2\mathbf{i}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}} + \left(\mathbf{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 \\
&= 2+\sqrt{2} + 2\mathbf{i}\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2} - 2 + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 2\mathbf{i}\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

Wegen $|z^2| = \sqrt{8+8} = 4$ und $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$ erhalten wir mit Hilfe der Eulerschen Identität die Polarformdarstellung

$$z^2 = 4\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{i}\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\exp(\mathbf{i}\tfrac{\pi}{4}).$$

Daraus folgt schliesslich

$$z^6 = (z^2)^3 = \left(4\exp(\mathbf{i}\tfrac{\pi}{4})\right)^3 = 64\exp(\mathbf{i}\tfrac{3}{4}\pi).$$

8. Sei $z = r\exp(\mathbf{i}\phi)$, so gilt $z^n =$

i) ✗ $r^n\exp(\mathbf{i}\phi^n)$.
ii) ✗ $n \cdot r\exp(\mathbf{i}\phi^n)$.
iii) ✗ $n \cdot r\exp(\mathbf{i}n\phi)$.
iv) ✓ $r^n\exp(\mathbf{i}n\phi)$.
v) ✗ weiss ich nicht

Lösung Dies ist die Formel von de Moivre.

9. Wahr oder falsch: $z^n = c$ hat für $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ genau n verschiedene Lösungen.

i) ✓ Wahr
ii) ✗ Falsch
iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung Sei c in Polarform gegeben, also $c = r\exp(\mathbf{i}\phi)$ mit $r > 0$ und $\phi \in (-\pi, \pi]$. Weiter machen wir den Ansatz $z = s\exp(\mathbf{i}\psi)$. Erfüllen müssen wir also die Gleichung

$$z^n = s^n\exp(\mathbf{i}n\psi) = r\exp(\mathbf{i}\phi).$$

Das liefert die Bedingungen

$$s = \sqrt[n]{r} > 0, \qquad \psi = \frac{\phi}{n} + \frac{2\pi}{n}k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Für $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$ ist ψ verschieden, der Fall $k = n$ ist wieder der Fall $k = 0$. Somit gibt es genau n verschiedene Lösungen. Für $c = 0$ gibt es mit $z = 0$ hingegen nur 1 Lösung.

10. Wahr oder falsch: $\forall c \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N} : -\frac{\pi}{n} < \arg(\sqrt[n]{c}) \leq \frac{\pi}{n}$.

i) ✗ Falsch

ii) ✓ Wahr

iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung Die Aussage ist korrekt!

11. Zwischenprüfung Winter 2015. Es seien $z, w \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen mit $z^4 = 1$ und $w^3 + \mathbf{i} = 0$. Welche der folgenden Zahlen ist ein möglicher Wert der Summe $z + w$?

i) ✓ 0

ii) ✗ $-\frac{\mathbf{i}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

iii) ✗ 1

iv) ✗ $\frac{1}{2} + \frac{\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}$

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung Die Lösungen von $z^4 = 1$ sind $\{\pm 1, \pm \mathbf{i}\}$. Um die Lösungen von $w^3 = -\mathbf{i}$ zu finden, schreibe $-\mathbf{i} = e^{\mathbf{i}(\frac{3}{2}+2k)\pi}$. Also gilt $w \in \{e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}}, e^{\mathbf{i}\frac{7\pi}{6}}, e^{\mathbf{i}\frac{11\pi}{6}}\} = \{\mathbf{i}, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mathbf{i}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mathbf{i}}{2}\}$. Von der obigen Auswahl ist nur $0 = (-\mathbf{i}) + \mathbf{i}$ ein möglicher Wert.

12. Wahr oder falsch: Der Hauptsatz der Algebra besagt, dass jedes Polynom n-ten Grades genau n verschiedene Nullstellen hat.

i) ✗ Wahr

ii) ✓ Falsch

iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung Das Polynom z^n hat nur eine Nullstelle, nämlich $z = 0$, diese dafür n Mal.

13. Wahr oder falsch: Jedes Polynom n-ten Grades mit reellen Koeffizienten hat n verschiedene Nullstellen.

i) ✗ Wahr

ii) ✓ Falsch

iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung Das Polynom z^n hat nur eine Nullstelle, nämlich $z = 0$, diese dafür n Mal.

14. Zwischenprüfung Winter 2015. Sei n eine ungerade natürliche Zahl. Jedes Polynom n-ten Grades mit reellen Koeffizienten hat mindestens eine reelle Nullstelle.

i) ✓ wahr

ii) ✗ falsch

iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung

Jedes Polynom $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ definiert eine stetige Funktion $p\colon R \to R$. Für grosse x wird $p(x)$ durch $a_n x^n$ dominiert. Ist n ungerade und $a_n > 0$, so gilt $p(x_-) < 0$ für x_- klein und $p(x_+) > 0$ für x_+ gross. Folglich gibt es nach dem Zwichenwertsatz ein $x_0 \in [x_-, x_+]$ mit $p(x_0) = 0$. Analoges gilt für $a_n < 0$.

Alternative:
Jedes Polynom n-ten Grades hat n komplexe Nullstellen (mit Vielfachheit). Sind alle Koeffizienten reell, so treten nicht reelle Nullstellen in Paaren $z, \overline{z}$ auf. Die Anzahl nicht reeller Nullstellen ist folglich gerade und es muss mindestens eine reelle Nullstelle existieren.