Analysis D-BAUG
Dr. Meike Akveld HS 2015

MC-Serie 4 - Folgen und Reihen

1. Welche der Aussagen sind richtig?

i) ✗ Jede beschränkte Folge ist konvergent.
ii) ✗ **Zwischenprüfung Winter 2014.** Die Summe zweier divergenter Folgen ist divergent.
iii) ✗ Eine divergente Folge ist nicht beschränkt.
iv) ✗ Jede konvergente Folge ist monoton.
v) ✓ Sei a_n eine konvergente Folge. Dann ist auch $b_n = (a_n)^2$ konvergent.
vi) ✓ Jede konvergente Folge ist beschränkt.
vii) ✓ Eine nicht beschränkte Folge divergiert.
viii) ✗ weiss ich nicht

Lösung Die Folge $a_n = (-1)^n$ ist beschränkt und divergent. Daher sind die erste und die dritte Aussage falsch.
Um zu sehen, dass die zweite Aussage falsch ist, betrachte $a_n = n$ und $b_n = -n$. Diese sind beides divergente Folgen, jedoch gilt $a_n + b_n = 0$, was der konstanten Nullfolge entspricht.
Die Folge $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ ist nicht monoton und konvergiert gegen 0, also ist auch die vierte Aussage falsch.
Wenn a_n gegen a konvergiert, so konvergiert $b_n = (a_n)^2$ gegen a^2.
Schliesslich ist die letzte Aussage die Kontraposition der zweitletzten. Diese folgt direkt aus der Definition der Konvergenz.

2. Zwischenprüfung Winter 2014. Betrachten Sie die Folge

$$a_n = \left(\frac{(5+n)^{100}}{5^{n+1}}\right) \cdot \left(\frac{5^n}{(4+n)^{100}}\right).$$

Bestimmen Sie den Grenzwert $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

i) ✗ $a = 1$
ii) ✗ Diese Folge konvergiert nicht.
iii) ✗ $a = \left(\frac{5}{4}\right)^{100}$
iv) ✗ $a = \frac{5}{4}$
v) ✓ $a = \frac{1}{5}$
vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung Wir rechnen

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{(5+n)^{100}}{5^{n+1}}\right) \cdot \left(\frac{5^n}{(4+n)^{100}}\right) = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5+n}{4+n}\right)^{100} \\ &= \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5/n+1}{4/n+1}\right)^{100} \longrightarrow \frac{1}{5} \qquad (n \to \infty). \end{aligned}$$

3. Gegeben sei die Folge $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?

i) ✗ Die Folge ist konvergent.
ii) ✗ Die Folge ist beschränkt.
iii) ✗ Der Limes der Folge ist 1.
iv) ✓ Die Folge ist eine Nullfolge.
v) ✗ Die Folge ist monoton wachsend.
vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung Für alle $n \geq 1$ gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)(n+1)}{n(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} > 1.$$

Da alle Folgenglieder positiv sind, folgt $a_{n+1} > a_n$, d.h. die Folge ist monoton wachsend. Weiter gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1.$$

Somit ist die Folge beschränkt und konvergiert gegen 1. Also sind alle Aussagen bis auf die vierte richtig.

4. Gegeben sei die Folge $a_n = \frac{n^2}{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?

i) ✗ Die Folge ist monoton wachsend.
ii) ✓ Die Folge ist beschränkt.
iii) ✗ Die Folge besitzt keinen Limes in $\mathbb{R}$.
iv) ✗ Die Folge ist divergent.
v) ✗ weiss ich nicht

Lösung

Die Folge ist monoton wachsend, denn es gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2(n+1)}{(n+2)n^2} = \frac{n^3+3n^2+3n+1}{n^3+2n^2} > 1.$$

Da alle Folgenglieder positiv sind, folgt $a_{n+1} > a_n$.

Für alle $n \geq 1$ gilt $\frac{n}{n+1} \geq \frac{1}{2}$ und damit

$$a_n = \frac{n^2}{n+1} = n\frac{n}{n+1} \geq \frac{n}{2}.$$

Also ist $\{a_n\}$ unbeschränkt.

Es folgt, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ gilt und dass folglich $\{a_n\}$ divergent ist, also auch keinen Limes in $\mathbb{R}$ hat.

5. Prüfungsaufgabe 5a, Sommer 2013. Die Folge $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ konvergiert, weil

i) ✓ sie streng monoton wachsend und von oben durch 3 beschränkt ist.
ii) ✗ sie streng monoton fallend und von oben durch 3 beschränkt ist.
iii) ✗ sie streng monoton fallend und von unten durch 2 beschränkt ist.
iv) ✗ sie streng monoton wachsend und von unten durch 2 beschränkt ist.
v) ✗ weiss ich nicht

Lösung

Die Folge ist monoton wachsend und von oben beschränkt. Solche Folgen konvergieren immer.

Die Folge ist auch von unten beschränkt. Dies impliziert jedoch keine Konvergenz. Beispielsweise ist auch die Folge $b_n = n + 1$ streng monoton wachsend und von unten durch 2 beschränkt, offensichtlich jedoch divergent.

6. Prüfungsaufgabe 5b, Sommer 2013. Welche der folgenden Begründungen für Aussagen über eine Reihe ist logisch korrekt?

i) ✗ Die Folge der Partialsummen der Reihe ist monoton; daher konvergiert die Reihe.
ii) ✗ Bei jedem Schritt addiert man weniger dazu als beim vorangegangenen; daher konvergiert die Reihe.
iii) ✓ Alle Glieder der Reihe sind positiv und die Reihe konvergiert; daher konvergiert die Reihe absolut.
iv) ✗ Die Reihe hat unendlich viele Glieder, die alle grösser als Null sind; daher divergiert die Reihe.
v) ✗ weiss ich nicht

Lösung

Die ersten beiden Aussagen sind falsch für die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Wenn alle Reihenglieder positiv sind, so ist die Reihe gleich der Reihe der Absolutbeträge und die letztere konvergiert dann auch.

Die letzte Aussage ist falsch für die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n}$.

7. Zu einer Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ betrachten wir folgende Aussagen:

a) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert.

b) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

c) Die Folge $\{a_k\}$ konvergiert gegen 0.

Welche der folgenden Implikationen sind korrekt?

i) ✗ (3.) ⇒ (1.)

ii) ✓ (2.) ⇒ (3.)

iii) ✗ (1.) ⇒ (2.)

iv) ✓ (1.) ⇒ (3.)

v) ✗ (3.) ⇒ (2.)

vi) ✓ (2.) ⇒ (1.)

vii) ✗ weiss ich nicht

Lösung

(2.) ⇒ (1.): Betrachte zuerst die Partialsumme $\sum_{k=1}^{n}(a_k + |a_k|)$. Sie ist monoton steigend ($a_k + |a_k| \geq 0$) und beschränkt, denn es gilt

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + |a_k|) \leq 2\sum_{k=1}^{n}|a_k| \leq 2\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| < \infty.$$

Somit konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + |a_k|)$. Da wir $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k + |a_k|) - \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ als Differenz zweier konvergenter Reihen schreiben können, folgt Konvergenz.

(1.) ⇒ (3.): Wegen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a < \infty$ gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon)$, so dass

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k - a\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right| \leq \epsilon \qquad \text{für alle } n \geq N(\epsilon),$$

und somit natürlich auch

$$\left|\sum_{k=n+2}^{\infty} a_k\right| \leq \epsilon \qquad \text{für alle } n \geq N(\epsilon).$$

Weiter können wir folgern:

$$|a_{n+1}| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k - \sum_{k=n+2}^{\infty} a_k\right| \leq \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right| + \left|\sum_{k=n+2}^{\infty} a_k\right| \leq 2\epsilon.$$

Also konvergiert $\{|a_n|\}$ gegen Null (der Faktor 2 beim ϵ ändert nichts an der Konvergenz!). Wenn $\{|a_n|\}$ gegen Null konvergiert, dann aber auch $\{a_n\}$.

(3.) $\not\Rightarrow$ (1.): Die Folge $\left\{\frac{1}{k}\right\}$ konvergiert gegen Null, die zugehörige Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ ist jedoch divergent (harmonische Reihe).

(1.) $\not\Rightarrow$ (2.): Betrachte $a_k = \frac{(-1)^k}{k}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, da a_k eine alternierende Nullfolge ist. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ hingegen divergiert (harmonische Reihe).

8. Welche der Reihen divergieren?

- i) ✗ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n+1}{2}\right)^n}$.
- ii) ✗ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$.
- iii) ✓ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.
- iv) ✓ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.
- v) ✗ Keine der Reihen divergiert.
- vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung

(1) Mit dem Wurzelkriterium erhalten wir

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{4n^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n+1}{2}\right)^n}\right|} = \frac{\sqrt[n]{4}\sqrt{n}}{\frac{n+1}{2}} = 2\cdot\frac{\frac{\sqrt[n]{4}}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{n}}.$$

Dies geht gegen Null für $n\to\infty$ und die Reihe ist konvergent.

(2) Wird durch eine geometrische Reihe mit Faktor < 1 majorisiert: Für grosse n gilt $\frac{1}{2^n} > \frac{1}{n!}$.

(3) Wird durch die harmonische Reihe minorisiert.

(4) Harmonische Reihe.

9. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k}$

- i) ✗ divergiert.
- ii) ✗ konvergiert absolut.
- iii) ✓ konvergiert, aber nicht absolut.
- iv) ✗ weiss ich nicht

Lösung Die Reihe der Absolutbeträge ist die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$, welche bekanntermassen divergiert; also ist die erste Möglichkeit falsch. Aber die Reihenglieder haben alternierendes Vorzeichen und ihre Absolutbeträge gehen monoton fallend gegen 0; also konvergiert die Reihe. Somit ist die zweite Möglichkeit richtig und die dritte falsch.

10. Zwischenprüfung Winter 2015. Jede konvergente Folge ist monoton.

i) ✗ wahr

ii) ✓ falsch

iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung Betrachte die Nullfolge $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

11. **Zwischenprüfung Winter 2015.** Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe. Dann konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$.

i) ✗ wahr

ii) ✓ falsch

iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung Ein Gegenbeispiel ist die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n = \sum_{kn=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist dann die harmonische Reihe, welche divergiert.

12. **Zwischenprüfung Winter 2015.** Bestimme den Grenzwert der folgenden Reihe, falls sie konvergiert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} 2^{n+1}$$

i) ✗ 2

ii) ✓ 4

iii) ✗ 9

iv) ✗ Die Reihe divergiert.

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung Dies ist eine geometrische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} 2^{n+1} = \frac{4}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 4.$$