Analysis D-BAUG
Dr. Meike Akveld HS 2015

MC-Serie 5 - Funktionen I

1. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

i) ✓ Es existiert eine Injektion $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 6 = 0\} \cup \{0, 1\} \to \{x \in \mathbb{N} \mid 10 < x^2 < 100\}$.

ii) ✓ Es existiert eine Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ (hier ist $0 \in \mathbb{N}$).

iii) ✗ Es existiert eine Injektion $\mathbb{N} \to \{x \in [-1000, 1000] \mid \sin(x) = 0\}$.

iv) ✓ Es existiert eine Injektion $\mathbb{N} \to [0, 1/2]$.

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung

Bemerkung: Für beliebige Mengen X, Y mit endlich vielen Elementen und eine beliebige Menge Z mit unendlich vielen Elementen gilt (dabei bezeichnet $|A|$ die Anzahl der Elemente von A):

- Es gibt eine Injektion $X \to Y$ genau dann, wenn $|X| \leq |Y|$.
- Es gibt eine Surjektion $X \to Y$ genau dann, wenn $|X| \geq |Y|$.
- Folglich gibt es eine Bijektion $X \to Y$ genau dann, wenn $|X| = |Y|$.
- Es gibt keine Injektion $Z \to Y$.
- Es gibt keine Surjektion $X \to Z$.

(1) Die linke Menge ist gleich $\{0, 1, 2, 3\}$, die rechte ist gleich $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Eine Injektion wäre zum Beispiel $0 \mapsto 4, 1 \mapsto 9, 2 \mapsto 8, 3 \mapsto 5$.

(2) Zum Beispiel $n \mapsto n/2$ für n gerade und $n \mapsto -(n + 1)/2$ für n ungerade.

(3) Die erste Menge hat unendlich viele Elemente, die zweite ist endlich. Damit nehmen sicher zwei Elemente in $\mathbb{N}$ den selben Funktionswert an.

(4) Zum Beispiel $0 \mapsto 0$ und $n \mapsto 1/(2n)$ für $n \geq 1$.

2. Was ist die geometrische Bedeutung der Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon (x, y) \mapsto (y, x)$?

i) ✗ Drehung um π.

ii) ✗ Spiegelung an der x-Achse.

iii) ✗ Spiegelung an der y-Achse.

iv) ✗ Drehung um $\pi/2$ gegen den Uhrzeigersinn.

v) ✓ Spiegelung an der Geraden $x = y$.

vi) ✗ Drehung um $\pi/2$ im Uhrzeigersinn.

vii) ✗ weiss ich nicht

Lösung

(1) Das wäre $(x, y) \mapsto (-x, -y)$.

(2) Das wäre $(x, y) \mapsto (x, -y)$.

(3) Das wäre $(x, y) \mapsto (-x, y)$.

(4) Das wäre $(x, y) \mapsto (-y, x)$.

(5) Richtig. Dadurch werden die Koordinaten vertauscht.

(6) Das wäre $(x, y) \mapsto (y, -x)$.

3. Welche der folgenden Teilmengen sind Graphen von Funktionen?

i) ✗ Nur (a) und (b).
ii) ✗ Nur (c) und (d).
iii) ✗ Nur (a) und (d).
iv) ✗ Nur (a).
v) ✓ Nur (a), (c) und (d).
vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung (b) ist kein Graph, weil verschiedene y-Koordinaten mit derselben x-Koordinate vorhanden sind. Für die anderen Teilmengen tritt dieses Problem nicht auf; deshalb sind sie Graph einer Funktion auf einem geeigneten Definitionsbereich. Die korrekte Antwort lautet daher (a), (c) und (d).

4. Zwischenprüfung Winter 2014. Bestimmen Sie die Inverse von $f(x) = \frac{1}{1+ae^x}$ mit $a > 0$ und deren maximalen Definitionsbereich.

i) ✗ $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1-x}{ax}\right)$, $x \in (0, \infty)$
ii) ✗ $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1-x}{ax}\right)$, $x \in \mathbb{R}$
iii) ✓ $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1-x}{ax}\right)$, $x \in (0, 1)$
iv) ✗ $f^{-1}(x) = 1 + ae^x$, $x \in \mathbb{R}$
v) ✗ weiss ich nicht

Lösung Es gilt

$$y = \frac{1}{1+ae^x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y} = 1 + ae^x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\frac{1}{y} - 1}{a} = e^x \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{1-y}{ay}\right) = x,$$

also $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1-x}{ax}\right)$. Der Definitionsbereich ergibt sich aus dem Definitionsbereich des natürlichen Logarithmus, dieser ist für positive Zahlen definiert. Also muss in unserem Fall $\frac{1-x}{ax} > 0$ gelten. Dies ist für $x = 0$ nicht definiert und für $x < 0$ nicht erfüllbar. Für $x > 0$ ist die Bedingung äquivalent zu $1 - x > 0$ und damit lautet der Definitionsbereich $(0, 1)$.

5. Welche der folgenden Funktionen $]-1,1[\to \mathbb{R}$ sind streng monoton wachsend?

i) ✗ $x \mapsto |x| + x$
ii) ✓ $x \mapsto e^x$
iii) ✗ $x \mapsto x^2$
iv) ✗ $x \mapsto x^3 - x$
v) ✗ $x \mapsto \arccos x$
vi) ✗ keine
vii) ✗ weiss ich nicht

Lösung Auf $]-1,0]$ ist x^2 streng monoton fallend und $|x|+x=0$ konstant, also scheiden diese aus. Wegen $(\frac{1}{2})^3 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{8} < 0 = 0^3 - 0$ scheidet auch $x \mapsto x^3 - x$ aus. Die Funktion $x \mapsto \arccos x$ ist sogar streng monoton fallend. Nur die Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$ ist hier streng monoton wachsend.

6. Zwischenprüfung Winter 2014. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Bedingungen ist ***nicht*** hinreichend um zu garantieren, dass f eine Inverse hat?

i) ✓ f ist symmetrisch bezüglich des Ursprungs.
ii) ✗ f ist streng monoton wachsend und surjektiv.
iii) ✗ $f(x) = ax^3, a \neq 0$.
iv) ✗ f ist bijektiv.
v) ✗ weiss ich nicht

Lösung

(1) Dies ist im Allgemeinen nicht hinreichend. Ein Gegenbeispiel ist $f(x) = \sin x$.

(2) Streng monoton wachsende Funktionen sind injektiv. Mit der Surjektivität zusammen erhalten wir, dass f bijektiv ist.

(3) Die Inverse auf ganz $\mathbb{R}$ lautet $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{a}}$.

(4) Bijektive Funktionen sind immer invertierbar.

7. Die auf allen reellen Zahlen definierten Funktionen f und g seien ungerade. Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

i) ✓ Die Funktion $f \cdot g$ ist ungerade.
ii) ✗ Die Funktion $f/g \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ ist gerade (hier wird $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \colon g(x) \neq 0$ angenommen).
iii) ✗ Die Funktion $f - g$ ist ungerade.
iv) ✗ Die Funktion $f + g$ ist ungerade.
v) ✗ weiss ich nicht

Lösung Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
(f+g)(-x) &= f(-x)+g(-x) = -f(x)-g(x) = -(f+g)(x) \implies f+g \text{ ist ungerade,}\\
(f-g)(-x) &= f(-x)-g(-x) = -f(x)+g(x) = -(f-g)(x) \implies f-g \text{ ist ungerade,}\\
(f\cdot g)(-x) &= f(-x)\cdot g(-x) = (-f(x))\cdot(-g(x)) = (f\cdot g)(x) \implies f\cdot g \text{ ist gerade,}\\
(f/g)(-x) &= \frac{f(-x)}{g(-x)} = \frac{-f(x)}{-g(x)} = (f/g)(x) \implies f/g \text{ ist gerade.}
\end{aligned}$$

8. Gegeben seien vier Funktionen $f_i : D_i \to Z_i, i = 1,2,3,4$. Welches f_i besitzt *keine* Umkehrfunktion $f^{-1} : Z_i \to D_i$?

i) ✗ $f_1 : [-2,2] \to [-16,16],\ x \mapsto x^3 - 12x$
ii) ✗ $f_2 : [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \to [-1,1],\ x \mapsto \sin x$
iii) ✗ $f_3 : [1,4] \to [1,16], x \mapsto x^2$
iv) ✓ $f_4 : [2,4] \to [-16,24], x \mapsto x^3 - 12x$
v) ✗ Alle besitzen eine Umkehrfunktion.
vi) ✗ weiss ich nicht

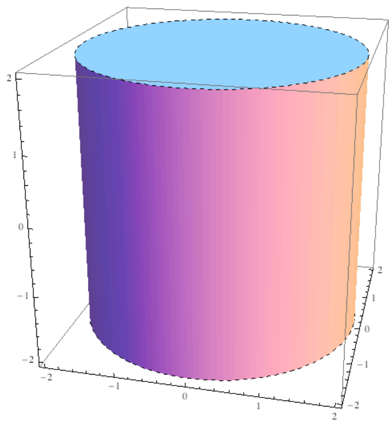
Lösung Die Funktionen sind alle streng monoton, die ersten beiden fallend und die anderen wachsend. Sie sind daher injektiv. Der Wertebereich ist jeweils wieder ein Intervall, und zwar wegen der Monotonie genau das Intervall zwischen den Funktionswerten an den Grenzen des Definitionsintervalls. Bei f_1, f_2, f_3 sind diese Funktionswerte genau die Grenzen des Zielintervalls, also ist die Funktion surjektiv und somit bijektiv. Bei f_4 gilt dagegen $f(2) = -16$ und $f(4) = 16 < 24$, also ist der Wertebereich nur $[-16,16] \neq [-16,24]$ und die Funktion nicht surjektiv.

9. Gegeben sei der Punkt $(r,\varphi,\vartheta) = (2, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ in Kugelkoordinaten (für die Definition siehe Vorlesungsnotizen). Welchem Punkt entspricht er in kartesischen Koordinaten?

i) ✗ $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{3})$.
ii) ✗ $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{3})$.
iii) ✓ $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{3})$.
iv) ✗ $(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$.
v) ✗ weiss ich nicht

Lösung Nach Definition gilt $x = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $y = r\sin\vartheta\sin\varphi$ und $z = r\cos\vartheta$, wobei $\vartheta \in [0,\pi]$ und $\varphi \in (-\pi,\pi]$.

10. *(Kugelkoordinaten)* Welche Parametrisierung passt zu dieser Zeichnung?



i) ✗ $\left\{(r,\varphi,\vartheta) : r = 4\cos\vartheta, 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{4}\right\}$.

ii) ✗ $\left\{(r,\varphi,\vartheta) : r = \frac{2}{\cos\vartheta}, 0 \le \vartheta < \frac{\pi}{2}\right\}$.

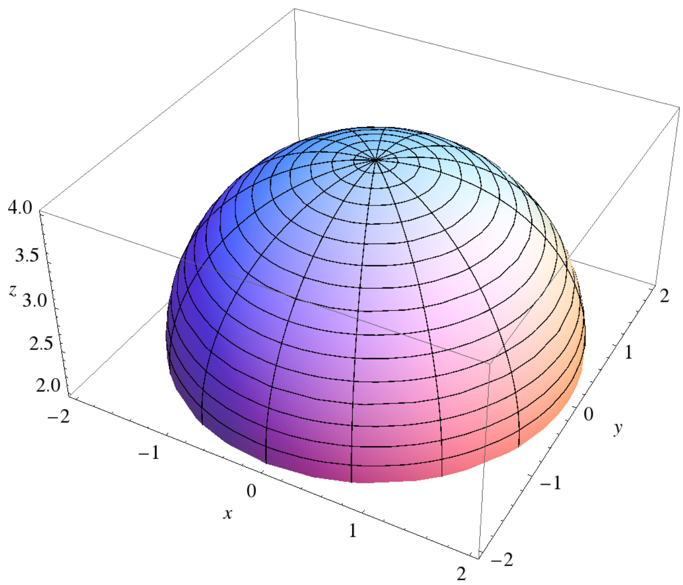
iii) ✓ $\left\{(r,\varphi,\vartheta) : r = \frac{2}{\sin\vartheta}, 0 < \vartheta < \pi\right\}$.

iv) ✗ $\{(r,\varphi,\vartheta) : 1 \le r \le 3\}$.

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung Nach Definition der Kugelkoordinaten $x = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $y = r\sin\vartheta\sin\varphi$, $z = r\cos\vartheta$ entspricht $r\sin\vartheta$ der Projektion des Radius auf die xy-Ebene, oder in anderen Worten dem Abstand zur z-Achse. Falls $r\sin\vartheta = const$ hat man folglich einen Zylinder.

11. *(Kugelkoordinaten)* Welche Parametrisierung passt zu dieser Zeichnung?



i) ✗ $\left\{(r,\varphi,\vartheta) : r = \frac{2}{\cos\vartheta}, 0 \le \vartheta < \frac{\pi}{2}\right\}$.

ii) ✓ $\left\{(r,\varphi,\vartheta) : r = 4\cos\vartheta, 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{4}\right\}$.

iii) ✗ $\left\{(r,\varphi,\vartheta) : r = \frac{2}{\sin\vartheta}, 0 < \vartheta < \pi\right\}$.

iv) ✗ $\{(r,\varphi,\vartheta) : 1 \leq r \leq 3\}$.

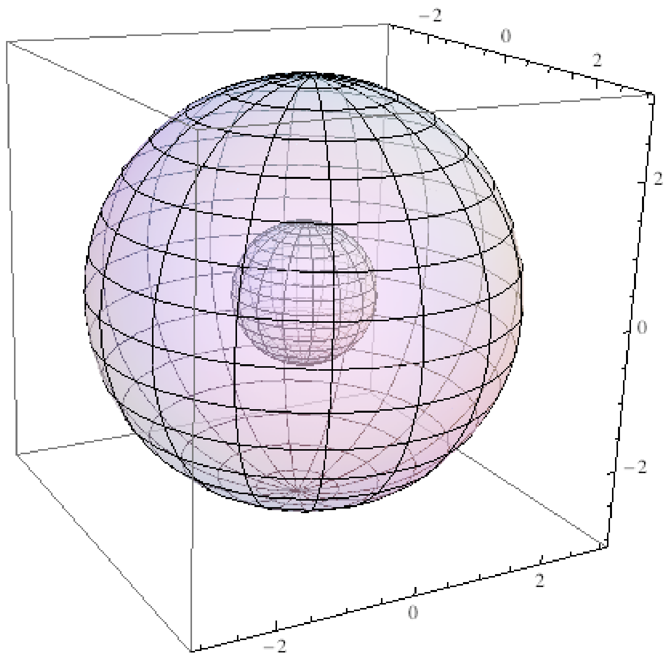
v) ✗ weiss ich nicht

Lösung Wenn man die Gleichung $r = 4\cos\vartheta$ mit $r > 0$ multipliziert, folgt $r^2 = 4z$. Mit der Definition von r rechnen wir (mit quadratischem Ergänzen)

$$\begin{aligned} & r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 4z \\ \Leftrightarrow\quad & x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x^2 + y^2 + (z-2)^2 - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4. \end{aligned}$$

Das ist die Gleichung der Sphäre mit Radius 2 und Mittelpunkt $(0,0,2)$. Wegen $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}$ wird nur die obere Halbsphäre parametrisiert. Überlegen Sie sich weshalb.

12. *(Kugelkoordinaten)* Welche Parametrisierung passt zu dieser Zeichnung?



i) ✗ $\left\{(r,\varphi,\vartheta) : r = 4\cos\vartheta, 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}\right\}$.

ii) ✗ $\left\{(r,\varphi,\vartheta) : r = \frac{2}{\sin\vartheta}, 0 < \vartheta < \pi\right\}$.

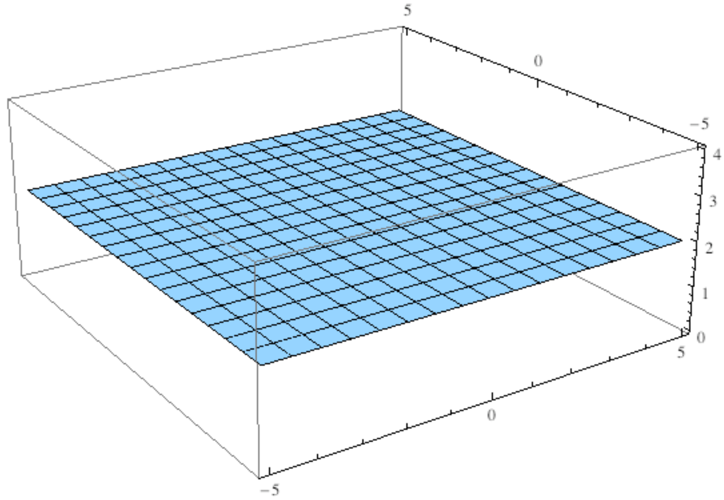
iii) ✗ $\left\{(r,\varphi,\vartheta) : r = \frac{2}{\cos\vartheta}, 0 \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}\right\}$.

iv) ✓ $\{(r,\varphi,\vartheta) : 1 \leq r \leq 3\}$.

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung Der Radius darf zwischen 1 und 3 variieren. $\vartheta \in [0,\pi]$ und $\varphi \in (-\pi,\pi]$ sind beliebig.

13. *(Kugelkoordinaten)* Welche Parametrisierung passt zu dieser Zeichnung?



i) ✗ $\left\{(r,\varphi,\vartheta) : r = 4\cos\vartheta, 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}\right\}$.

ii) ✗ $\left\{(r,\varphi,\vartheta) : r = \frac{2}{\sin\vartheta}, 0 < \vartheta < \pi\right\}$.

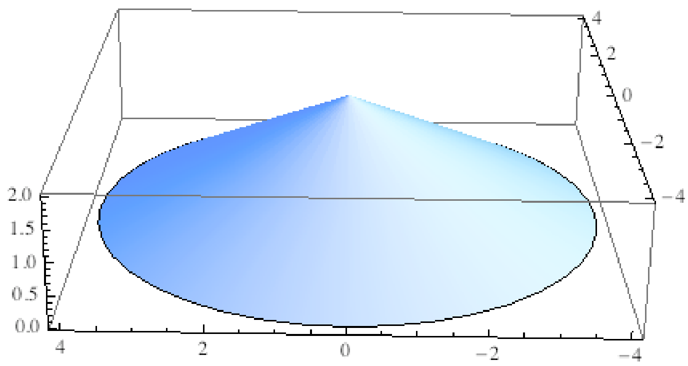
iii) ✓ $\left\{(r,\varphi,\vartheta) : r = \frac{2}{\cos\vartheta}, 0 \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}\right\}$.

iv) ✗ $\{(r,\varphi,\vartheta) : 1 \leq r \leq 3\}$.

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung Nach Definition der Kugelkoordinaten $x = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $y = r\sin\vartheta\sin\varphi$, $z = r\cos\vartheta$ entspricht $r\cos\vartheta$ der $z-$Koordinate. Für $r\cos\vartheta = \mathit{const}$ hat man eine horizontale Ebene.

14. *(Zylinderkoordinaten)* Welche Parametrisierung passt zu dieser Zeichnung?



i) ✗ $\left\{(r,\varphi,z) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}, 0 \leq z \leq 1\right\}$.

ii) ✗ $\{(r,\varphi,z) : 2r \leq z \leq 4\}$.

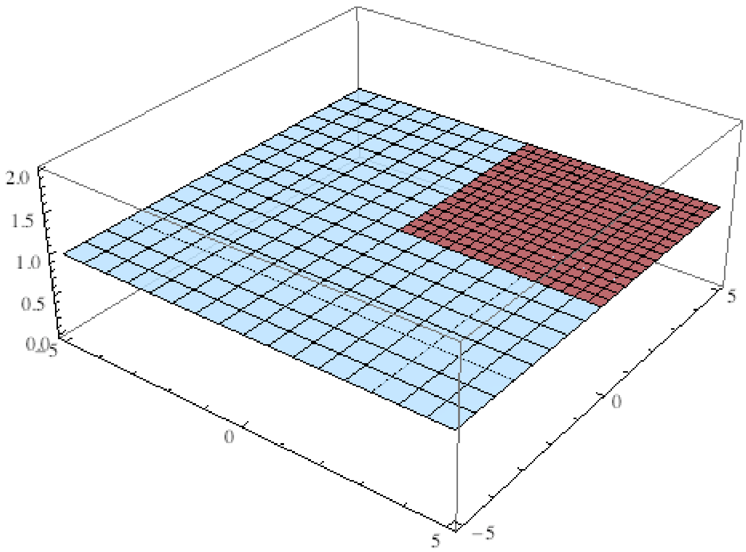
iii) ✗ $\left\{(r,\varphi,z) : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, z = 1\right\}$.

iv) ✓ $\left\{(r, \varphi, z) : 0 \leq z \leq 2 - \frac{r}{2}\right\}$.

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung Die Figur ist rotationssymmetrisch bezüglich der z-Achse. Die z-Koordinate ist von unten durch 0 und von oben durch die Gerade $z = 2 - \frac{r}{2}$ beschränkt. Somit hat man einen Kegel mit Spitze in $(0, 0, 2)$ und Basis in der xy-Ebene mit Zentrum im Ursprung und Radius 4.

15. *(Zylinderkoordinaten)* Welche Parametrisierung passt zu dieser Zeichnung?



i) ✗ $\left\{(r, \varphi, z) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}, 0 \leq z \leq 1\right\}$.

ii) ✗ $\{(r, \varphi, z) : 2r \leq z \leq 4\}$.

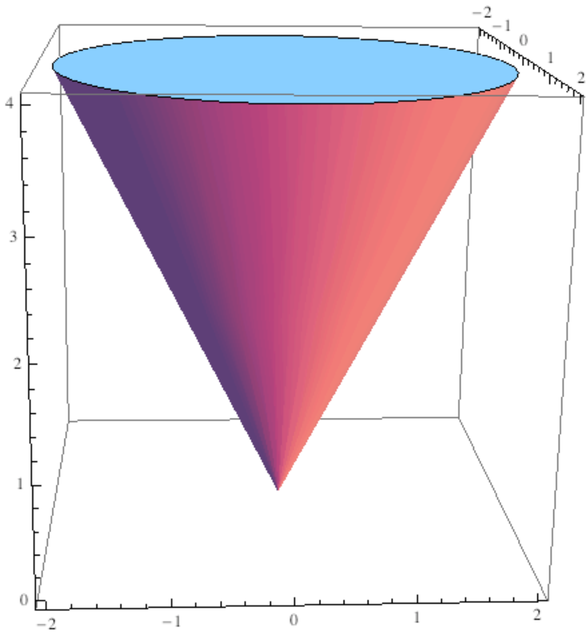
iii) ✗ $\left\{(r, \varphi, z) : 0 \leq z \leq 2 - \frac{r}{2}\right\}$.

iv) ✓ $\left\{(r, \varphi, z) : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, z = 1\right\}$.

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung Folgt direkt aus der Definition der Zylinderkoordinaten $x = r \sin \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$, wobei $\varphi \in (-\pi, \pi]$.

16. *(Zylinderkoordinaten)* Welche Parametrisierung passt zu dieser Zeichnung?



i) ✗ $\left\{(r,\varphi,z) : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, z = 1\right\}$.

ii) ✗ $\left\{(r,\varphi,z) : 0 \leq z \leq 2 - \frac{r}{2}\right\}$.

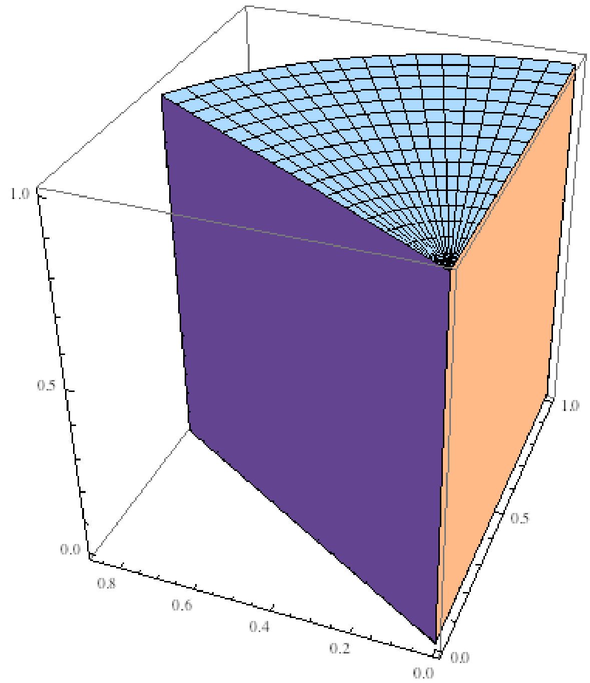
iii) ✓ $\{(r,\varphi,z) : 2r \leq z \leq 4\}$.

iv) ✗ $\left\{(r,\varphi,z) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}, 0 \leq z \leq 1\right\}$.

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung Der obere Rand $z = 4$ ist offensichtlich eine horizontale Ebene. Der untere Rand ist gegeben durch die Gleichung $2r = z$ oder äquivalent $r = \frac{z}{2}$. Somit hat man einen Kegel mit Spitze im Ursprung und Basis in $z = 4$ mit Zentrum $(0, 0, 4)$ und Radius 2.

17. *(Zylinderkoordinaten)* Welche Parametrisierung passt zu dieser Zeichnung?



i) ✗ $\{(r,\varphi,z) : 2r \leq z \leq 4\}$.

ii) ✗ $\left\{(r,\varphi,z) : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, z = 1\right\}$.

iii) ✗ $\left\{(r,\varphi,z) : 0 \leq z \leq 2 - \frac{r}{2}\right\}$.

iv) ✓ $\left\{(r,\varphi,z) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}, 0 \leq z \leq 1\right\}$.

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung Mit $-\pi < \varphi \leq \pi$ wäre der Zylinder voll. Da aber $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ gilt, hat man nur einen Sektor davon.