MC-Serie 6 - Funktionen II + Differentialrechnung

1. Welche der folgenden stückweise definierten Funktionen ist **nicht** stetig?

i) ✗ $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 3 \\ \dfrac{x^2-9}{x-3}, & x < 3. \end{cases}$

ii) ✗ $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \geq 0 \\ x^2, & x < 0. \end{cases}$

iii) ✓ $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x > 0 \\ 3x, & x \leq 0. \end{cases}$

iv) ✗ $f(x) = \begin{cases} e^x, & x > 1 \\ e - x + 1, & x \leq 1. \end{cases}$

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung

(1) Man sieht, dass die beiden Teil-Funktionen stetig sind. Man muss also nur noch den Grenzwert in der Verbindungsstelle überprüfen

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} x+3 = 6 = 2 \cdot 3$$

und somit ist die Funktion stetig.

(2) Man sieht, dass die beiden Teil-Funktionen stetig sind. Man muss also nur noch den Grenzwert in der Verbindungsstelle überprüfen

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0 = |0|$$

und somit ist die Funktion stetig.

(3) Man sieht, dass die beiden Teil-Funktionen stetig sind. Man muss also nur noch den Grenzwert in der Verbindungsstelle überprüfen

$$\lim_{x\to 0} 2x+3 = 3 \neq 3 \cdot 0$$

und somit ist die Funktion *nicht* stetig.

(4) Man sieht, dass die beiden Teil-Funktionen stetig sind. Man muss also nur noch den Grenzwert in der Verbindungsstelle überprüfen

$$\lim_{x\to 1} e^x = e = e - 1 + 1$$

und somit ist die Funktion stetig.

2. Welche der folgenden Aussagen über die Funktion

$$f(x) = (x+2)\frac{|x-1|}{x-1}$$

ist **falsch**?

i) ✓ $\lim_{x\to 1} f(x) = 3.$

ii) ✗ $\lim_{x\to 1-} f(x) = -3.$

iii) ✗ $\lim_{x\to 0} f(x) = -2.$

iv) ✗ $\lim_{x\to 1+} f(x) = 3.$

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung

(1) Falls der Grenzwert existiert, muss $\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1-} f(x)$ gelten. Wir haben jedoch

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 1+} f(x) = 3\cdot 1 = 3 \\ \lim_{x\to 1-} f(x) = 3\cdot(-1) = -3 \end{cases}$$

also existiert dieser Grenzwert nicht.

(2) Man berechnet

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} (x+2)\frac{-(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-} (x+2)\cdot(-1) = -3.$$

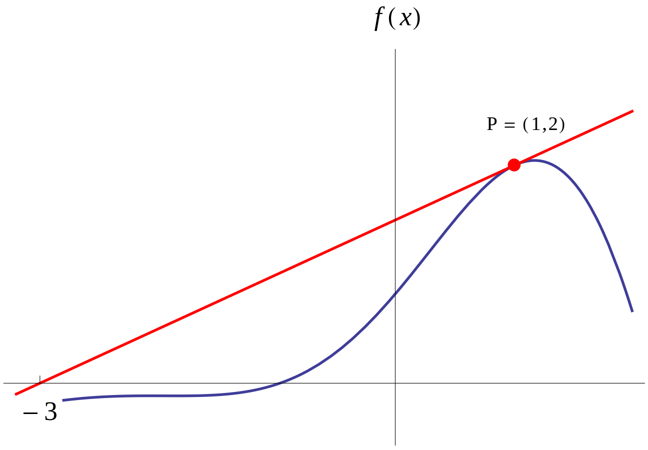
(3) Man berechnet

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2\frac{|-1|}{-1} = 2\cdot -1 = -2.$$

(4) Man berechnet

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} (x+2)\frac{x-1}{x-1} = \lim_{x\to 1+} x+2 = 3\cdot 1 = 3.$$

3. Im folgenden Bild ist die rote Gerade im Punkt P tangential an die blaue Kurve, die der Graph einer Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist. Welchen Wert hat die Ableitung f' an der Stelle 1?



i) ✗ Keiner dieser Werte ist korrekt.

ii) ✗ -2

iii) ✗ $-\frac{2}{3}$

iv) ✓ $\frac{1}{2}$

v) ✗ 2

vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung Der Wert $f'(1)$ ist die Steigung m der Geraden, welche die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(1, f(1))$ definiert. Die Steigung ist:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-0}{1-(-3)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

4. Die erste Ableitung von $f(x) = \left(\frac{x^9+3x^2-12}{x^3-x}\right)^7$ ist gegeben durch

i) ✗ $\left(\frac{9x^8+6x}{3x^3-1}\right)^7$

ii) ✗ $\left(\frac{6x^{11}-8x^9-3x^4+33x^2-12}{(x^3-x)^2}\right)^7$

iii) ✓ $7\left(\frac{x^9+3x^2-12}{x^3-x}\right)^6 \frac{6x^{11}-8x^9-3x^4+33x^2-12}{(x^3-x)^2}$

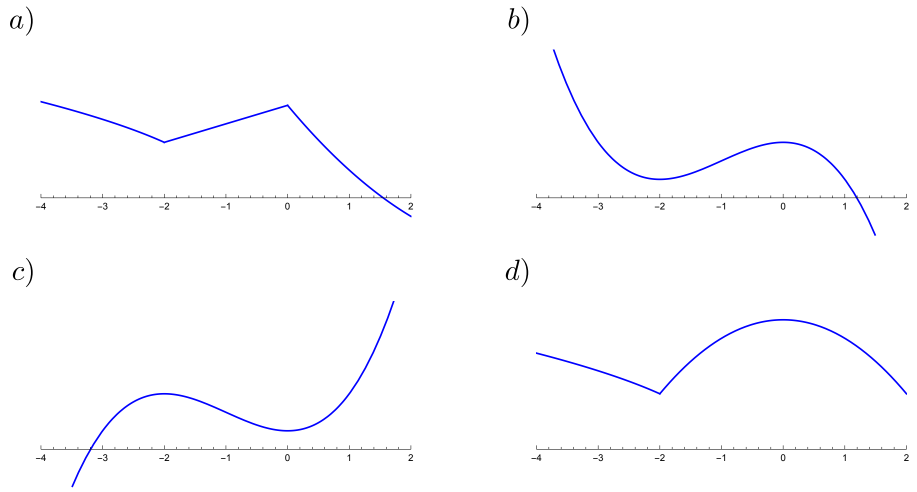
iv) ✗ $7\left(\frac{x^9+3x^2-12}{x^3-x}\right)^6$

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) &= 7\left(\frac{x^9+3x^2-12}{x^3-x}\right)^6 \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x^9+3x^2-12}{x^3-x}\right)}{\mathrm{d}x} \\
&= 7\left(\frac{x^9+3x^2-12}{x^3-x}\right)^6 \frac{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^9+3x^2-12)\right)(x^3-x)-(x^9+3x^2-12)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3-x)\right)}{(x^3-x)^2} \\
&= 7\left(\frac{x^9+3x^2-12}{x^3-x}\right)^6 \frac{(9x^8+6x)(x^3-x)-(x^9+3x^2-12)(3x^2-1)}{(x^3-x)^2} \\
&= 7\left(\frac{x^9+3x^2-12}{x^3-x}\right)^6 \frac{9x^{11}-9x^9+6x^4-6x^2-(3x^{11}-x^9+9x^4-3x^2-36x^2+12)}{(x^3-x)^2} \\
&= 7\left(\frac{x^9+3x^2-12}{x^3-x}\right)^6 \frac{6x^{11}-8x^9-3x^4+33x^2-12}{(x^3-x)^2}
\end{aligned}$$

5. Gegeben sind die folgenden Graphen:



Ordnen Sie diese den entsprechenden Funktionen zu.

a)

x	$f'(x)$
-2	0
0	0
1	$\frac{9}{4}$

i) ✗ a)
ii) ✗ b)
iii) ✓ c)
iv) ✗ d)
v) ✗ weiss ich nicht

b)

x	$f'(x)$
-2	0
0	0
1	$-\frac{9}{4}$

i) ✗ a)
ii) ✓ b)
iii) ✗ c)
iv) ✗ d)
v) ✗ weiss ich nicht

c)

x	$f'(x)$
-2	existiert nicht
0	0
1	-1

i) ✗ a)
ii) ✗ b)
iii) ✗ c)
iv) ✓ d)
v) ✗ weiss ich nicht

d)

x	$f'(x)$
-2	existiert nicht
0	existiert nicht
1	$-\frac{3}{2}$

i) ✓ a)
ii) ✗ b)
iii) ✗ c)
iv) ✗ d)
v) ✗ weiss ich nicht

Lösung

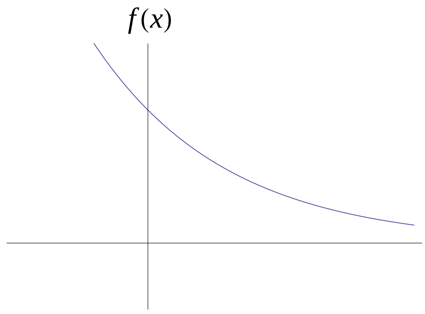
a)

b)

c)

d)

6. Die Figur zeigt den Graphen einer zweimal differenzierbaren Funktion f. Welche der Aussagen gelten?



i) ✓ Die zweite Ableitung f'' ist nichtnegativ.
ii) ✗ Die zweite Ableitung f'' ist nichtpositiv.
iii) ✓ Die Ableitung f' ist negativ.
iv) ✗ Die Ableitung f' ist positiv.
v) ✗ Die Funktion f ist negativ.
vi) ✓ Die Funktion f ist positiv.
vii) ✗ weiss ich nicht

Lösung Die Funktion liegt oberhalb der x-Achse ($f > 0$), ist strikt monoton fallend ($f' < 0$) und strikt konvex ($f'' > 0$).