Analysis D-BAUG
Dr. Meike Akveld HS 2015

Lösung: MC-Serie 7 - Hyperbelfunktionen Newton-Verfahren

1.

i) ✗ False

ii) ✗ False

iii) ✗ False

iv) ✓ True

v) ✗ False

Da $\sinh(0) = 0$ erhalten wir mit der letzten Formel für $x = 0$ die Gleichung $0 = 1$. Die Formel ist also falsch. Um die restlichen Formeln zu verifizieren, setze $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ und $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ein, z.B.

$$\begin{aligned}
\cosh^2 x + \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} + \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} \\
&= \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \cosh 2x.
\end{aligned}$$

2.

i) ✓ True

ii) ✗ False

iii) ✗ False

iv) ✗ False

v) ✗ False

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{e^x+e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}e^x + \frac{d}{dx}e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\left(e^x + (-1)e^{-x}\right) = \sinh(x)$

3.

i) ✗ False

ii) ✓ True

iii) ✗ False

iv) ✗ False

v) ✗ False

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{e^x-e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}e^x - \frac{d}{dx}e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\left(e^x - (-1)e^{-x}\right) = \cosh(x)$

4.

i) ✗ False

ii) ✓ True

iii) ✗ False

iv) ✗ False

v) ✗ False

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} &= \frac{\cosh(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh(x) - \sinh(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh(x)}{\cosh(x)^2} = \frac{\cosh(x)\cosh(x) - \sinh(x)\sinh(x)}{\cosh(x)^2} \\ &= 1 - \tanh(x)^2\end{aligned}$$

5.

i) ✗ False

ii) ✓ True

iii) ✗ False

iv) ✗ False

v) ✗ False

Betrachte die Hilfsfunktion $h(x) = f(x) - g(x)$. Die beiden Graphen schneiden sich genau dann, wenn $h(x) = 0$. Nach Voraussetzung gilt $h'(x) = f'(x) - g'(x) > 0$, also ist h streng monoton wachsend. Daher kann h höchstens eine Nullstelle und somit die beiden Graphen höchstens einen Schnittpunkt besitzen. Sie können jedoch auch disjunkt sein. Genau einen Schnittpunkt haben die Graphen von $f(x) = x$ und $g(x) = 3$. Dagegen haben die Graphen von $f(x) = e^x$ und $g(x) = 0$ keinen Schnittpunkt.

6.

i) ✗ False

ii) ✓ True

iii) ✗ False

iv) ✗ False

v) ✗ False

$$\begin{aligned} h'(x) &= (f^2(x) - g^2(x))' = 2f(x)f'(x) - 2g(x)g'(x) \\ &= 2f(x)(-g(x)) - 2g(x)f(x) = -4f(x)g(x) \end{aligned}$$

7.

i) ✗ False

ii) ✗ False

iii) ✓ True

iv) ✗ False

v) ✗ False

Dies ist der Differenzialquotient von $f(x) = 4x^4$ im Punkt $x_0 = \frac{1}{2}$ und folglich gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{4\left(\frac{1}{2}+h\right)^4 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^4}{h} = f'(\tfrac{1}{2}) = 16\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = 2.$$

Alternative: Mit Bernoulli-de l'Hôpital folgt

$$\lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{4\left(\frac{1}{2}+h\right)^4 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^4}^{\to 0}}{\underbrace{h}_{\to 0}} = \lim_{h\to 0} \frac{16\left(\frac{1}{2}+h\right)^3}{1} = 2.$$

8.

i) ✗ False

ii) ✗ False

iii) ✓ True

iv) ✗ False

v) ✗ False

Für $x_n > 0$ liefert die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^{1/2}}{1/2 \cdot x_n^{-1/2}} = x_n - 2x_n = -x_n.$$

Ebenso gilt für $x_n < 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{(-x_n)^{1/2}}{1/2 \cdot (-x_n)^{-1/2} \cdot (-1)} = x_n - 2x_n = -x_n.$$

Die Folge oszilliert also zwischen x_0 und $-x_0$.

9.

i) ✓ True

ii) ✗ False

iii) ✗ False