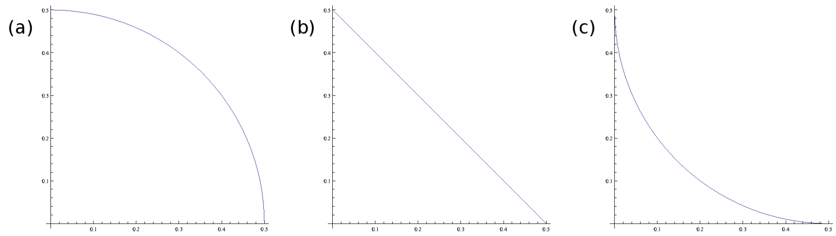
Analysis D-BAUG
Dr. Meike Akveld HS 2015

MC-Serie 8 - Parametrisierte Kurven

1. Eine Leiter der Länge 1 steht senkrecht an einer Wand. Auf halber Höhe ist eine Lampe angebracht. Das untere Ende der Leiter wird nun langsam von der Wand weggezogen, bis das obere Ende den Boden erreicht und die Leiter flach aufliegt. Wie sieht die Kurve aus, welche während des Bewegungsvorgangs von der Lampe beschrieben wird.



i) ✓ Ein Kreisbogen mit Zentrum $(0, 0)$ und Radius $\frac{1}{2}$.

ii) ✗ Eine Gerade von $(0, \frac{1}{2})$ bis $(\frac{1}{2}, 0)$.

iii) ✗ Ein Kreisbogen mit Zentrum $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und Radius $\frac{1}{2}$.

iv) ✗ weiss ich nicht

Lösung

Die folgende Abbildung zeigt die Situation für die Zeitpunkte, zu denen das untere Ende der Leiter den Boden an den Stellen $x = 0.2$, $x = 0.55$ bzw. $x = 0.9$ berührt.

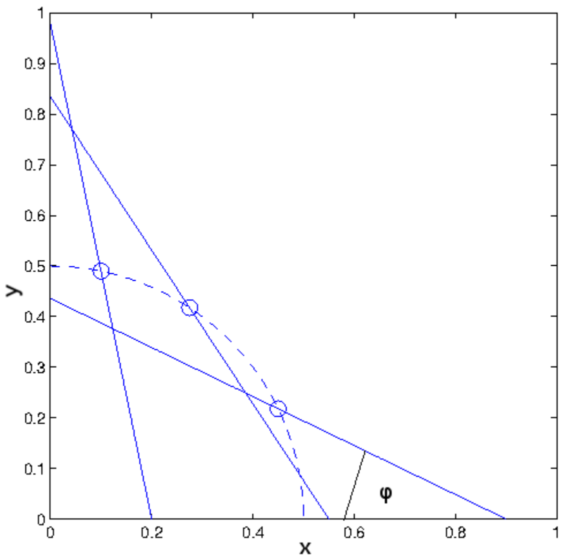


Abbildung 1: Aufgabe 1

Bezeichnen wir den Winkel zwischen Leiter und Boden mit φ (siehe Abbildung), so ist klar, dass der Berührpunkt "oberes Leiterende / Wand" durch $(0, \sin(\varphi))$ gegeben ist, und der Berührpunkt "unteres Leiterende / Boden" durch $(\cos(\varphi), 0)$. Da die Lampe sich genau in der Mitte zwischen den beiden Berührpunkten befindet, können wir ihre Kurve darstellen durch

$$[0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2, \qquad \varphi \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Die ist ein Viertelkreis mit Radius $\frac{1}{2}$ und Mittelpunkt $(0,0)$.

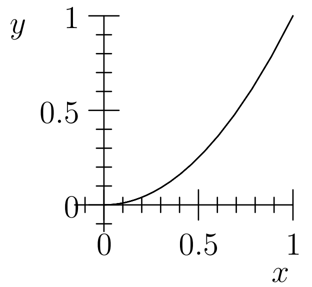
2. Die beiden Parametrisierungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $t \mapsto (t^2, t^4)$ und $t \mapsto (t^3, t^6)$ haben denselben Wertebereich.

i) ✗ Wahr.

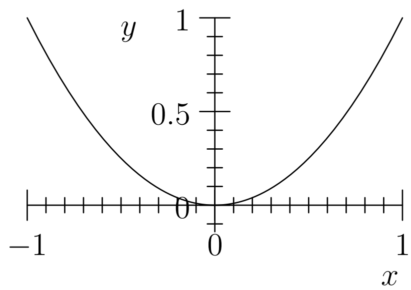
ii) ✓ Falsch.

iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung Die Wertemenge der ersten Abbildung:



Die Wertemenge der zweiten Abbildung:



Beachte, dass die beiden Kurven für positive x identisch sind.

3. Zwischenprüfung Winter 2015. An wie vielen Stellen schneidet die Kurve $r(t) = \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin t \end{pmatrix}$ die y-Achse?

i) ✗ an zwei Stellen

ii) ✗ an drei Stellen

iii) ✓ an vier Stellen

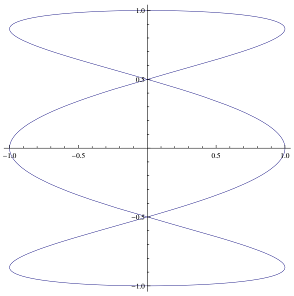
iv) ✗ an unendlich vielen Stellen

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung Die Kurve schneidet die y-Achse genau dann wenn $x(t) = \cos 3t = 0$, also für $t = \frac{(\frac{1}{2}+k)\pi}{3}$ mit $k \in Z$. Für diese Werte gilt

$$y(t) = \sin\left(\frac{(1+2k)\pi}{6}\right) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, & k \in 6Z \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, & k \in 6Z+1 \\ \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, & k \in 6Z+2 \\ \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}, & k \in 6Z+3 \\ \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1, & k \in 6Z+4 \\ \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}, & k \in 6Z+5 \end{cases}$$

Die vier Schnittpunkte lauten also $(0,-1), (0,-\frac{1}{2}), (0,\frac{1}{2}), (0,1)$.



4. Welche Bewegung eines Punktes in der Ebene beschreibt die Parametrisierung

$$[0, \tfrac{\pi}{3}] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -\sin 6t \\ \cos 6t \end{pmatrix} ?$$

i) ✓ Kreisbahn mit Mittelpunkt $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ und Radius 2, einmaliger Umlauf gegen den Uhrzeigersinn beginnend bei $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$.

ii) ✗ Kreisbahn mit Mittelpunkt $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ und Radius 2, einmaliger Umlauf im Uhrzeigersinn beginnend bei $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$.

iii) ✗ Kreisbahn mit Mittelpunkt $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ und Radius 2, dreimaliger Umlauf im Uhrzeigersinn beginnend bei $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$.

iv) ✗ Kreisbahn mit Mittelpunkt $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ und Radius 2, dreimaliger Umlauf gegen den Uhrzeigersinn beginnend bei $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$.

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung Zunächst bemerken wir, dass die von der Parametrisierung

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sin 6t \\ 2\cos 6t \end{pmatrix}$$

beschriebene Kurve die Kreisgleichung

$$\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + y^2 = 2^2$$

erfüllt. Daraus lesen wir den Mittelpunkt $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ und den Radius 2 ab. Den Startpunkt der Bewegung können wir berechnen, indem wir $t = 0$ setzen. Das ergibt

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wenn t grösser wird, verkleinert sich zunächst die x-Koordinate (wegen des negativen Vorzeichens vor dem Sinus), die y-Koordinate verkleinert sich ebenfalls. Der Kreis wird also gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen.

5. **Zwischenprüfung Winter 2015.** Die parametrisierte Kurve definiert durch $r(t) = \begin{pmatrix} \ln t \\ t \end{pmatrix}$ für $t > 0$ ist identisch zum Graphen der Funktion

i) ✗ $y = \ln x$ für $x \in R$

ii) ✗ $y = \ln x$ für $x > 0$

iii) ✓ $y = e^x$ für $x \in R$

iv) ✗ $y = e^x$ für $x > 0$

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung Punkte auf der Kurve erfüllen $x = \ln y$, bzw. $y = e^x$. Da $\ln\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ surjektiv ist, liegen alle Punkte (x, e^x) mit $x \in \mathbb{R}$ auf der Kurve.

6. Eine durch $t \mapsto (f(t), g(t))$ mit $g'(1) = 0$ parametrisierte Kurve in der (x, y)-Ebene besitzt am Punkt $(f(1), g(1))$ eine horizontale Tangente.

i) ✗ Wahr.

ii) ✓ Falsch.

iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung Falls zusätzlich $f'(1) = 0$ gilt, stimmt die Aussage nicht. Dann spricht man von einem "singulären Punkt".

7. Zwischenprüfung Winter 2014. Betrachten Sie die Bernoulli'sche Spirale

$$r(t) = \left(e^t \cos t, e^t \sin t\right).$$

Bestimmen Sie, ob die folgende Aussage richtig oder falsch ist: Der Ortsvektor $r(t)$ eines Punktes auf der Spirale steht immer senkrecht auf seinem Tangentialvektor.

i) ✓ falsch

ii) ✗ wahr

iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung Es gilt $\dot{r}(t) = \left(e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t\right)$ und damit

$$\begin{aligned}
\langle r(t), \dot{r}(t) \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^t \cos t - e^t \sin t \\ e^t \sin t + e^t \cos t \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= e^{2t}(\cos^2(t) - \cos(t)\sin(t) + \sin^2(t) + \sin(t)\cos(t)) \\
&= e^{2t} > 0, \text{ für alle } t.
\end{aligned}$$

8. Zwischenprüfung Winter 2014. Betrachten Sie nochmals die Bernoulli'sche Spirale

$$r(t) = \left(e^t \cos t, e^t \sin t\right).$$

Bestimmen Sie, ob die folgende Aussage richtig oder falsch ist: Der Quotient der x-Koordinaten zweier sukzessiver Schnittpunkte der Spirale mit der positiven x-Achse ist konstant.

i) ✓ wahr

ii) ✗ falsch

iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung Wir bestimmen zuerst die Schnittpunkte der Spriale mit der x-Achse, das sind alle Punkte mit y-Koordinate 0.

$$e^t \sin t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \pi \cdot k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Die x-Koordinate dieser Punkte ist

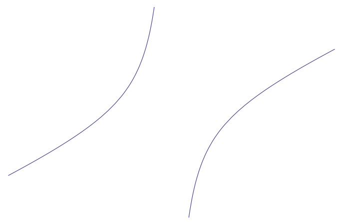
$$e^{\pi k} \cos(\pi k) = \begin{cases} e^{\pi k} > 0,\ k \text{ gerade} \\ -e^{\pi k} < 0,\ k \text{ ungerade} \end{cases} .$$

Für gerade k haben wir also einen Schnittpunkt der Spirale mit der positiven x-Achse. Der Quotient der x-Koordinaten zweier aufeinanderfolgender solcher Schnittpunkte ist somit

$$\frac{e^{\pi(k+2)}}{e^{\pi k}} = e^{2\pi}.$$

Der Quotient hängt also nicht von k ab und ist damit konstant.

9. Gegeben sind die Kurven K_1 (links) und K_2 (rechts), die beide für wachsenden Parameter t von links nach rechts durchlaufen werden. Es bezeichnen $k_1(t)$ und $k_2(t)$ die Krümmungen der beiden Kurven. Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?



i) ✗ k_1 ist positiv
ii) ✓ $t \mapsto k_2(t)$ ist monoton fallend
iii) ✗ k_2 ist negativ
iv) ✗ $t \mapsto k_1(t)$ ist monoton wachsend
v) ✗ weiss ich nicht

Lösung K_1 ist positiv gekrümmt (konvex) und die Krümmung wird immer stärker. K_2 ist negativ gekrümmt (konkav), jedoch wird die Kurve immer flacher, sprich sie ist immer weniger negativ gekrümmt. Somit ist k_2 monoton wachsend.