Analysis D-BAUG
Dr. Meike Akveld
HS 2015

MC-Serie 9 - Potenzreihen

1. Der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot x^k$ ist

i) ✗ 2.
ii) ✗ ∞.
iii) ✗ 0.
iv) ✗ 1.
v) ✓ $\frac{1}{2}$.
vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung Nach dem Quotientenkriterium ist der Konvergenzradius

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2^k}{2^{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

2. Der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$ ist

i) ✗ 0.
ii) ✗ ∞.
iii) ✓ e.
iv) ✗ 1.
v) ✗ weiss ich nicht

Lösung Nach dem Quotientenkriterium ist der Konvergenzradius

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n!}{n^n} \Big/ \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \right) &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n!}{n^n} \Big/ \frac{n!}{(n+1)^n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.\end{aligned}$$

3. Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{5^{n^2} n^n} x^n$

i) ✓ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.
ii) ✗ besitzt einen Konvergenzradius $\rho < \infty$ und konvergiert auf $[-\rho, \rho)$.
iii) ✗ besitzt einen Konvergenzradius $\rho < \infty$ und konvergiert auf $(-\rho, \rho]$.
iv) ✗ besitzt einen Konvergenzradius $\rho < \infty$ und konvergiert auf $(-\rho, \rho)$.
v) ✗ besitzt einen Konvergenzradius $\rho < \infty$ und konvergiert auf $[-\rho, \rho]$.
vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung Wir setzen die Koeffizienten $a_n = \frac{(-1)^n n!}{5^{n^2} n^n}$ in die Formel für den Konvergenzradius ein und erhalten unter Verwendung der vorhergehenden Aufgabe

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n n!}{5^{n^2} n^n}}{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{5^{(n+1)^2}(n+1)^{n+1}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n!}{n^n}}{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}\frac{5^{(n+1)^2}}{5^{n^2}} \\ &= e\lim_{n\to\infty} 5^{n^2+2n+1-n^2} = \infty.\end{aligned}$$

Die Potenzreihe besitzt demnach den Konvergenzradius ∞, konvergiert also für alle $x \in \mathbb{R}$. Die erste Antwort ist somit korrekt.

4. Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n} x^{2n}$ beträgt

i) ✓ $\frac{1}{3}$.
ii) ✗ ∞.
iii) ✗ 0.
iv) ✗ $\frac{1}{9}$.
v) ✗ 3.
vi) ✗ 9.
vii) ✗ weiss ich nicht

Lösung Das Quotientenkriterium lässt sich hier leider nicht direkt anwenden, da alle ungeraden Koeffizienten der Potenzreihe sämtlich Null sind. Wir betrachten daher statt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n} x^{2n}$ zunächst die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n} y^n$. Aus letzterer erhält man die ursprüngliche Potenzreihe zurück, indem man $y := x^2$ einsetzt. Die Koeffizienten der neuen Potenzreihe lauten $a_n = \frac{9^n}{n}$. Damit erhalten wir für deren Konvergenzradius

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{9^n}{9^{n+1}}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{1}{9}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1} = \frac{1}{9}.$$

Die Ersatzreihe konvergiert also für $|y| < \frac{1}{9}$. Wegen des Zusammenhangs $y = x^2$ ist dies genau dann der Fall, wenn $|x| < \frac{1}{3}$.

5. Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n} x^{2n}$

i) ✗ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.
ii) ✗ besitzt einen Konvergenzradius $\rho < \infty$ und konvergiert auf $[-\rho, \rho)$.
iii) ✓ besitzt einen Konvergenzradius $\rho < \infty$ und konvergiert auf $(-\rho, \rho)$.
iv) ✗ besitzt einen Konvergenzradius $\rho < \infty$ und konvergiert auf $(-\rho, \rho]$.
v) ✗ besitzt einen Konvergenzradius $\rho < \infty$ und konvergiert auf $[-\rho, \rho]$.
vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung Wegen der vorhergehenden Aufgabe wissen wir, dass $\varrho = 1/3$. Wir setzen $x = 1/3$ und $x = -1/3$ ein. Da alle ungeraden Koeffizienten verschwinden, hat die Potenzreihe an diesen beiden Stellen denselben Wert. Anders ausgedrückt: Einsetzen von $1/3$ und $-1/3$ kommt auf dasselbe hinaus.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n} \left(\pm\frac{1}{3}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n} \frac{1}{9^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergiert bekanntlich und die Randpunkte gehören beide nicht zum Konvergenzbereich.

6. Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}}(x+3)^n$ konvergiert

i) ✗ für alle $x \in \mathbb{R}$.

ii) ✗ für alle $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

iii) ✗ für alle $x \in [-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2})$.

iv) ✓ für alle $x \in (-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}]$.

v) ✗ für alle $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung Der Konvergenzradius beträgt

$$\varrho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Die Reihe konvergiert also sicher für $x \in (-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2})$ und divergiert für $x \notin [-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}]$. Für $x = -\frac{7}{1}$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}}(x+3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Die Reihe divergiert nach dem Minorantenkriterium. Im Fall $x = -\frac{5}{2}$ haben wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}}(x+3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

und die Potenzreihe konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium. Das Konvergenzintervall ist folglich $(-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}]$.

7. Zwischenprüfung Winter 2014. Sei $P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$. Bestimmen Sie das Konvergenzintervall von $P(x)$.

i) ✗ $[-2, 2]$

ii) ✗ $\mathbb{R}$

iii) ✗ $[-1, 1)$

iv) ✓ $[1,3]$

v) ✗ $[1,3)$

vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung Das Entwicklungszentrum ist offensichtlich $x_0 = 2$ und der Konvergenzradius berechnet sich durch

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n^2}{1/(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+1/n)^2}{1} = 1.$$

Das Konvergenzintervall hat also die Randpunkte 1 und 3. Für $x = 1$ konvergiert die Reihe als Leibniz-Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ ebenfalls. Für $x = 3$ ergibt sich die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, welche ebenfalls konvergiert.

8. Zwischenprüfung Winter 2015. Bestimme das Konvergenzintervall für die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(2x + \frac{1}{2}\right)^k .$$

i) ✗ $x = -\frac{1}{4}$

ii) ✗ $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

iii) ✓ $[-\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$

iv) ✗ $\mathbb{R}$

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung Der Konvergenzradius von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} y^k$ lautet

$$\varrho = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{k+1}{k} = 1.$$

Für $y = 1$ haben wir die harmonische Reihe und für $y = -1$ die alternierende harmonische Reihe. Folglich konvergiert die Reihe genau dann wenn $2x + \frac{1}{2} \in [-1, 1)$, also $x \in [-\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$.

9. Welche der folgenden Funktionen stellt die Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} kx^k$ dar?

i) ✗ $(1+x)^{-2}$

ii) ✗ $(1-x)^{-1}$

iii) ✓ $x \cdot (1-x)^{-2}$

iv) ✗ $(1-x)^{-2}$

v) ✗ $x \cdot (1-x)^{-3}$

vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung Es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^k = x \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right] = x \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (1-x)^{-1} = x \cdot (1-x)^{-2}.$$