Analysis D-BAUG
Dr. Meike Akveld HS 2015

MC-Serie 10 - Taylorreihen

1. Wie berechnet man die Potenzreihe um $x_0 = 0$ der Funktion $x \mapsto \frac{1}{x^2+2x+1}$ mit möglichst wenig Aufwand?

i) ✗ Mit Hilfe eines Ansatzes und anschliessendem Koeffizientenvergleich.

ii) ✓ Die Funktion als Quadrat von $\frac{1}{1+x}$ schreiben und die Reihe als Quadrat der Reihe für diese Funktion erhalten.

iii) ✗ Alle Ableitungen bestimmen und die Formel für die Taylorreihe auswerten.

iv) ✗ weiss ich nicht

Lösung Der Trick aus der korrekten Antwort führt am schnellsten zur Lösung, da wir die Reihenentwicklung von $\frac{1}{1+x}$ bereits kennen (geometrische Reihe) und uns deswegen den Aufwand mit dem vielen Ableiten sparen können.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = ?$

i) ✗ Der Grenzwert existiert nicht.

ii) ✗ π

iii) ✗ 1

iv) ✗ 0

v) ✓ $\frac{1}{2}$

vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung Für $x \to 0$ konvergieren Zähler und Nenner beide gegen 0. Nach der Regel von de l'Hôpital gilt damit

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x}.$$

Wieder konvergieren sowohl Zähler als auch Nenner für $x \to 0$ gegen 0. Erneute Anwendung der Regel von de l'Hôpital ergibt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Alternativ kann man die Kosinus-Reihe verwenden:

$$\begin{aligned}
\frac{1-\cos x}{x^2} &= \frac{1}{x^2}\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right) \\
&= \frac{1}{x^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2(n-1)}}{(2n)!} \\
&\overset{k=n-1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{\big(2(k+1)\big)!}.
\end{aligned}$$

Diese Reihe stellt eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion dar, deren Wert am Nullpunkt $\frac{1}{2}$ beträgt. Das ist gerade der gesuchte Grenzwert.

3. $\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x)}{\sin(x)} = ?$

i) ✗ -1
ii) ✓ 1
iii) ✗ 0
iv) ✗ ∞
v) ✗ weiss ich nicht

Lösung Da Nenner und Zähler gegen 0 konvergieren, folgt mit der Regel von de l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x)}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - x\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{1-0}{1} = 1.$$

4. Durch zweifache Anwendung der Regel von de l'Hôpital folgt

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = 3.$$

Was stimmt an dieser Überlegung nicht? Die Regel von de l'Hôpital ist ...

i) ✗ durchaus anwendbar und die Überlegung ist richtig!
ii) ✗ nicht anwendbar, weil die beiden ersten Brüche keine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion beschreiben.
iii) ✓ auf den zweiten Bruch nicht anwendbar, weil Zähler und Nenner für $x \to 1$ nicht beide gegen 0 oder ∞ streben.
iv) ✗ nicht anwendbar, weil das Zählerpolynom jeweils einen höheren Grad als das Nennerpolynom hat.
v) ✗ auf den ersten Bruch nicht anwendbar, weil Zähler und Nenner für $x \to 1$ nicht beide gegen 0 oder ∞ streben.
vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung Die Regel von de l'Hôpital ist anwendbar, wenn sowohl der Zähler als auch der Nenner beide gegen 0 oder beide gegen ∞ streben. Für $x = 1$ gilt $x^3 + x - 2 = 0$ und $x^2 - 3x + 2 = 0$. Damit ist die Regel von de l'Hôpital auf den ersten Bruch anwendbar und das erste "=" stimmt. Für den zweiten Bruch sind dagegen die Voraussetzungen nicht erfüllt, denn der Nenner hat an der Stelle 1 den Wert -1 und der Zähler den Wert 4. Vielmehr gilt:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3} = \frac{3+1}{2-3} = -4.$$

5. Durch welche der folgenden Ausdrücke wird die Taylorreihe von

$$f(x) = x^3 - 5x^2 - x + 2$$

an der Stelle 1 dargestellt?

i) ✗ $x^3 - 2x^2 - 8x - 1$
ii) ✗ $(x-1)^3 - 5(x-1)^2 - (x-1) + 2$
iii) ✓ $x^3 - 5x^2 - x + 2$
iv) ✓ $(x-1)^3 - 2(x-1)^2 - 8(x-1) - 3$
v) ✗ weiss ich nicht

Lösung Wir rechnen $f(1) = -3$, $f'(1) = 3 \cdot 1 - 10 \cdot 1 - 1 = -8$, $f''(1) = 6 \cdot 1 - 10 = -4$, $f'''(1) = 6$ und alle höheren Ableitungen verschwinden, daher ist die Taylorreihe

$$\frac{6}{3!}(x-1)^3 - \frac{4}{2!}(x-1)^2 + \frac{-8}{1!}(x-1)^1 + \frac{-3}{0!}(x-1)^0 = (x-1)^3 - 2(x-1)^2 - 8(x-1) - 3.$$

Alternativ können wir direkt rechnen

$$\begin{aligned} x^3 - 5x^2 - x + 2 &= \big((x-1)^3 + 3x^2 - 3x + 1\big) - 5x^2 - x + 2 \\ &= (x-1)^3 - 2x^2 - 4x + 3 \\ &= (x-1)^3 - \big(2(x-1)^2 + 4x - 2\big) - 4x + 3 \\ &= (x-1)^3 - 2(x-1)^2 - 8x + 5 \\ &= (x-1)^3 - 2(x-1)^2 - (8(x-1) + 8) + 5 \\ &= (x-1)^3 - 2(x-1)^2 - 8(x-1) - 3. \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Taylorreihe zu einem Polynom ist immer das Polynom selber und das gilt unabhänging vom Entwicklungspunkt. Wenn man die Taylorreihe stur nach der Formel hinschreibt (siehe zum Beispiel oben), sieht es auf den ersten Blick für jeden Entwicklungspunkt anders aus, alle diese Entwicklungen ausmultipliziert ergeben jedoch immer wieder das Polynom selber. Beachte insbesondere, dass das nur für Polynome gilt! Für alle anderen Funktionen ergeben verschiedene Entwicklungspunkte in der Regel auch verschiedene Taylorreihen.

Wir haben die Taylorreihe eingeführt, um eine Funktion f in der Nähe des Entwicklungspunktes x_0 durch ein Polynom zu approximieren. Die Approximation wird dabei immer besser, je mehr Terme wir hinzunehmen. Das nullte Taylorpolynom ist nur die konstante Funktion, welche durch durch $f(x_0)$ geht, beim ersten Taylorpolynom handelt es sich um die Tangente an den Punkt $f(x_0)$. Vergleiche das erste Taylorpolynom mit der Tangentengleichung und stelle fest, dass es wirklich dasselbe ist! Insbesondere ist eine Gerade $f(x) = ax + b$, seine Tangente an einem beliebigen Punkt und das erste Taylorpolynom an einem beliebigen Entwicklungspunkt identisch.

Wenn wir also ein Polynom an einem beliebigen Punkt durch ein Polynom approximieren wollen, dann ist das Resultat natürlich wieder das Polynom selber. Dies ist wenig erstaunlich, zeigt aber nochmals, dass die Taylorreihe wirklich das tut, was sie soll.

6. Zwischenprüfung Winter 2014. Bestimmen Sie den Koeffizienten von x^2 in der Taylorreihe von $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ um $x_0 = 0$.

i) ✗ 1
ii) ✓ 3
iii) ✗ $\frac{1}{3}$
iv) ✗ 6
v) ✗ $\frac{1}{6}$
vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung Der Koeffizient ist $\frac{f''(0)}{2}$ und das kann man direkt berechnen. Alternativer Lösungsweg mit geometrischer Reihe:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+x)^2} &= \frac{1}{1-(-x)} \cdot \frac{1}{1-(-x)} = (1 - x + x^2 - \cdots) \cdot (1 - x + x^2 - \cdots) \\ &= 1 - 2x + 3x^2 - \cdots \end{aligned}$$

7. Wie lautet das zweite Taylorpolynom $T_2(x)$ der Funktion $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$?

i) ✓ $1 + \frac{x^2}{2}$
ii) ✗ Das gesuchte Polynom ist nicht unter diesen Antworten.
iii) ✗ $1 + x + \frac{x^2}{2}$
iv) ✗ $1 + x^2$
v) ✗ $1 + x + x^2$
vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung Das zweite Taylorpolynom um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ lautet per Definition

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2.$$

Wir berechnen nun $f(0)$, $f'(0)$ sowie $f''(0)$ und setzen diese in obige Formel ein. Es gilt $f(0) = \frac{e^0}{1} = 1$. Mit Hilfe der Quotientenregel folgt

$$f'(x) = \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \frac{e^x x}{(x+1)^2}$$

und damit $f'(0) = 0$. Für die zweite Ableitung erhalten wir wieder mit der Quotientenregel

$$f''(x) = \frac{(e^x x)'(x+1)^2 - e^x x \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(e^x + xe^x)(x+1)^2 - e^x x \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}.$$

Setzen wir $x = x_0 = 0$ ein, so bekommen wir $f''(0) = 1$. Das zweite Taylorpolynom lautet also $T_2(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$. Die erste Antwort stimmt.

8. **Zwischenprüfung Winter 2014.** Sei $T_5(x) = 3x^2 - 5x^3 + 7x^4 + 3x^5$ das Taylorpolynom 5. Grades an der Stelle $x_0 = 0$ von f. Dann ist $f'''(0) = \ldots$

i) ✓ -30.

ii) ✗ $-\frac{5}{6}$.

iii) ✗ $-\frac{1}{6}$.

iv) ✗ -5.

v) ✗ -15.

vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung Die dritten Ableitungen von T_5 und f stimmen bei $x_0 = 0$ überein. Also

$$f'''(0) = T_5'''(0) = -30.$$

Alternativ kann man auch den Koeffizienten von x^3 in der Taylorreihe von $f(x)$ betrachten, dieser lautet $\frac{f'''(0)}{6}$. Ein Koeffizientenvergleich mit T_5 ergibt ebenfalls die korrekte Lösung.

9. Wenn man zwei Funktionen addiert, dann werden ihre Taylorreihen an einem Punkt x_0

i) ✗ es kann keine allgemein gültige Aussage getroffen werden.

ii) ✗ multipliziert.

iii) ✓ addiert.

iv) ✗ subtrahiert.

v) ✗ addiert, aber man erhält die Taylorreihe an der Stelle $2x_0$.

vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung Die Taylorreihe der Summe $f + g$ zweier Funktionen ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(f+g)^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Wegen

$$(f+g)^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) + g^{(k)}(x_0)$$

ist die erste Antwort die richtige.

10. Von einer Polynomfunktion f sei bekannt, dass

$$f(3) = 6, \qquad f'(3) = 8, \qquad f''(3) = 11, \qquad f^{(n)}(3) = 0, \forall n \geq 3.$$

Dabei seien f und $f^{(n)}$, $\forall n \geq 1$ stetige Funktionen auf $[3, 7]$. Dann gilt $f(7) =$

i) ✗ 38.

ii) ✗ 214.

iii) ✗ 331.5.

iv) ✓ 126.

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung Die Taylorreihe lautet bekanntlich

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Wir wählen $x_0 = 3$ und setzen in diese Formel ein, das ergibt

$$f(x) = 6 + 8(x-3) + \frac{11}{2}(x-3)^2.$$

Setzen wir nun $x = 7$ ein, so ergibt sich

$$f(7) = 6 + 8 \cdot 4 + \frac{11}{2} \cdot 4^2 = 6 + 32 + 88 = 126.$$

11. Das Taylorpolynom 3. Grades an der Stelle $x_0 = 0$ von $f(x) = \sin(2x)$ ist gegeben durch...

i) ✗ $2x - 4x^2 + \frac{16x^3}{3}$.

ii) ✓ $2x - \frac{4x^3}{3}$.

iii) ✗ $2 + x - \frac{x^3}{6}$.

iv) ✗ $2 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.

v) ✗ $2x - \frac{x^3}{3}$.

vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung Die Reihenentwicklung der Sinusfunktion lautet bekanntlich

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

und setzen wir hier an Stelle von x überall $2x$ ein, so ergibt sich

$$\sin(2x) = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \dots,$$

dies führt zu

$$T_3(x) = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} = 2x - \frac{8x^3}{6} = 2x - \frac{4x^3}{3}.$$

Alternativ kann man das natürlich auch direkt mit der Taylorformel berechnen.

12. Zwischenprüfung Winter 2015. Wie lautet das Taylorpolynom zweiten Grades von $\sqrt{1+2x}$ um den Punkt $x_0 = 0$?

i) ✗ $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$

ii) ✗ $2 + x + \frac{x^2}{4}$

iii) ✓ $1 + x - \frac{x^2}{2}$

iv) ✗ $1 + x + x^2$

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung Gesucht ist das Taylorpolynom 2. Ordnung. Wir haben

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+2x)^{\frac{1}{2}}, \\ f'(x) &= \tfrac{1}{2} \cdot (1+2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = (1+2x)^{\frac{1}{2}}, \\ f''(x) &= -\tfrac{1}{2} \cdot (1+2x)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2 = -(1+2x)^{-\frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

und daher

$$T_2(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 = 1 + x - \frac{x^2}{2}.$$

13. **Zwischenprüfung Winter 2015.** Gesucht ist eine Funktion f für welche $f'(x) = \sin(x^2)$ gilt. Bestimme den Koeffizienten a_3 von x^3 in der Taylorreihe von $f(x)$ um $x_0 = 0$.

i) ✗ $a_3 = \frac{1}{3!}$

ii) ✗ $a_3 = \frac{1}{2}$

iii) ✗ $a_3 = 0$

iv) ✓ $a_3 = \frac{1}{3}$

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung Die Reihenentwicklung von $\sin x$ lautet

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

und folglich

$$f'(x) = \sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + \ldots$$

Somit gilt

$$f(x) = c + \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{42} + \ldots$$