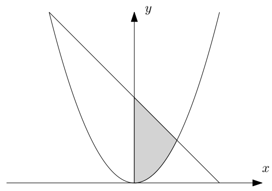
Analysis D-BAUG
Dr. Meike Akveld

HS 2015

MC-Serie 11 - Integralrechnung

1. Wie gross ist der Flächeninhalt F der Figur im ersten Quadrant, die zwischen der Parabel $y = x^2$ und der Geraden $y = 2 - x$ liegt?



i) ✗ $F = \frac{5}{6}$.

ii) ✗ $F = \frac{4}{3}$.

iii) ✗ $F = \frac{10}{3}$.

iv) ✓ $F = \frac{7}{6}$.

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung

Die beiden Funktionen schneiden sich in

$$x^2 = 2 - x \text{ das heisst dort wo } (x-1)(x+2) = 0$$

also im 1.Quadranten bei $x = 1$. Die Fläche zwischen den Kurven ist

$$F = \int_0^1 (2-x) - x^2 dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}.$$

2. Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^1 e^{2x}\,\mathrm{d}x$.

i) ✗ $2e^2$.

ii) ✓ $\frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right)$.

iii) ✗ e^2.

iv) ✗ $e^2 - 1$.

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung

$$\int_0^1 e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(e^2 - e^0\right) = \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right).$$

3. Falls $\int_0^1 |f(x)| \,\mathrm{d}x = 0$ folgt $\forall x \in [0,1]\colon f(x) = 0$.

i) ✗ Wahr.

ii) ✓ Falsch.

iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung

Ein Gegenbeispiel ist gegeben durch $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 1/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$

4. Seien F, G Stammfunktionen von f, $g : (a,b) \to \mathbb{R}$. Welche der Aussagen gelten?

i) ✓ $F + G$ ist eine Stammfunktion von $f + g$.

ii) ✗ FG ist eine Stammfunktion von fg.

iii) ✓ FG ist eine Stammfunktion von $fG + Fg$.

iv) ✓ Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann ist $F + c$ eine Stammfunktion von f.

v) ✗ weiss ich nicht

- **Lösung**
  (1) Richtig. Dies folgt aus $(F + G)' = F' + G'$.
- **Lösung**
  (2) Falsch. Z.B. ist $F(x) = G(x) = x$ eine Stammfunktion von $f(x) = g(x) = 1$, aber x^2 keine Stammfunktion von 1.
- **Lösung**
  (3) Richtig. Es gilt nämlich $(FG)' = fG + Fg$.
- **Lösung**
  (4) Richtig. Dies folgt aus $(F + c)' = F'$.

5. Welche der folgenden Funktionen sind für $x > 0$ monoton wachsend?

i) ✓ $x \mapsto \int_0^x \sin^2 t \,\mathrm{d}t$

ii) ✗ $x \mapsto \int_0^x \sin t \,\mathrm{d}t$

iii) ✓ $x \mapsto \int_0^x t^2 \,\mathrm{d}t$

iv) ✓ $x \mapsto \int_0^x t \,\mathrm{d}t$

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Nach dem Hauptsatz ist die Ableitung der Funktionen jeweils die Integrandenfunktion. Diese sind bis auf die zweite alle ≥ 0. Ist die Ableitung einer Funktion nicht negativ, ist die Funktion monoton wachsend.

Eine geometrische Begründung: Ausser bei (c) wächst die Fläche unter dem Funktionsgraphen.

6. Die Fläche zwischen der Kurve $y = f(x)$, der x-Achse und den Geraden $x = a$ und $x = b$ lässt sich berechnen mittels

i) ✗ $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

ii) ✓ $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

iii) ✗ $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

iv) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Im allgemeinen besteht die Fläche aus je einem Teil über und unter der x-Achse. Das Integral von $f(x)$ zählt den oberen mit positivem und den unteren mit negativem Vorzeichen. Somit liefert (iii) die Differenz der beiden Flächeninhalte und (i) den Absolutbetrag der Differenz. Das Integral von $|f(x)|$ zählt beide mit positivem Vorzeichen; die richtige Antwort lautet also (ii).

7. Geben Sie die Formel für die n-te Untersumme U_n der Funktion $f(x) = e^x$ im Intervall $[0, 1]$ an.

i) ✓ $\frac{1}{n}\frac{1-e}{1-e^{1/n}}$

ii) ✗ $e - 1$

iii) ✗ $\frac{1}{n}\frac{1-e^{1+1/n}}{1-e^{1/n}}$

iv) ✗ $\sum_{i=1}^{n} \frac{e^x}{n}$

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Da die Funktion monoton wachsend ist, nimmt sie ihr Minimum auf einem abgeschlossenen Intervall am linkesten Punkt an. Daher ist die Untersumme nach der Summenformel für die geometrische Reihe mit $q = e^{1/n}$

$$U_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{k/n}}{n} = \frac{1}{n}\frac{1-(e^{1/n})^n}{1-e^{1/n}} = \frac{1}{n}\frac{1-e}{1-e^{1/n}}.$$

8. Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} U_n$ mit U_n aus der vorherigen Aufgabe.

i) ✗ 0
ii) ✗ 1
iii) ✗ ∞
iv) ✗ e^x
v) ✓ $e-1$
vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Mit der Regel von de l'Hôpital bekommen wir

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} U_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\frac{1-e}{1-e^{1/n}} \\ &= (1-e)\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-e^x} \\ &= (1-e)\lim_{x\to 0}\frac{1}{-e^x} \\ &= (1-e)\frac{1}{-1} \\ &= e-1.\end{aligned}$$

9. Berechnen Sie $\int_0^1 e^x \,\mathrm{d}x$.

i) ✗ 1
ii) ✗ 0
iii) ✓ $e-1$
iv) ✗ e^x
v) ✗ $\ln(1)-\ln(0)$
vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung

$$\int_0^1 e^x \,\mathrm{d}x = [e^x]_0^1 = e-1$$

Beachte, dass dies tatsächlich dasselbe ist wie in der vorherigen Aufgabe, da die Untersumme in diesem Fall gegen das Integral konvergiert.

10. Wie lautet die Ableitung der Funktion $f(x) = \int_{-\cos x}^{\cos x}(1+2\sin t)\,\mathrm{d}t$?

i) ✗ $f'(x) = 2\sin(\cos x) + \cos x$
ii) ✗ $f'(x) = 4\sin(\cos x)$
iii) ✗ $f'(x) = 4\sin(\cos x) + 2\cos x$

iv) ✓ $f'(x) = -2\sin x$

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Es gilt

$$f(x) = \int_{-\cos x}^{\cos x} (1 + 2\sin t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_{-\cos x}^{\cos x} 1\,\mathrm{d}t}_{=[t]_{-\cos x}^{\cos x} = 2\cos x} + \underbrace{\int_{-\cos x}^{\cos x} 2\sin t\,\mathrm{d}t}_{=0} = 2\cos x.$$

Der Wert des zweiten Integrals ist Null, da der Integrand eine ungerade Funktion darstellt und das Integrationsintervall symmetrisch zum Nullpunkt liegt. Damit finden wir

$$f'(x) = -2\sin x.$$

Die vierte Antwort ist also die richtige.

11.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\int_1^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t}{x^2 - 1} = \dots$$

i) ✗ e

ii) ✓ $\frac{e}{2}$

iii) ✗ $\frac{e^{t^2}}{2}$

iv) ✗ 0

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Mit Bernoulli-de l'Hôpital und dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung erhalten wir

$$\lim_{x\to 1} \frac{\overbrace{\int_1^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t}^{\to 0}}{\underbrace{x^2 - 1}_{\to 0}} = \lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2}}{2x} = \frac{e}{2}.$$