Analysis D-BAUG
Dr. Meike Akveld HS 2015

MC-Serie 12 - Integrationstechniken

1. Die Formel
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = xf(x) - \int xf'(x)\,\mathrm{d}x$$

i) ✗ ist im Allgemeinen falsch.

ii) ✗ folgt aus der Substitutionsregel.

iii) ✗ folgt aus dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung.

iv) ✓ folgt aus der partiellen Integration.

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Die Formel folgt durch partielle Integration der Funktion $1 \cdot f(x)$, wobei 1 integriert und $f(x)$ differenziert wird. Richtig ist also (iv). Der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung betrifft dagegen das bestimmte Integral. Substituiert wird auch nichts: Auf beiden Seiten steht $f(x)$ und nicht f von etwas anderem.

2. Welche der folgenden Rechnungen ist **keine** korrekte Anwendung der partiellen Integration?

i) ✗ $\displaystyle\int x \cdot \ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$

ii) ✗ $\displaystyle\int \sin\phi \cdot \cos\phi\,\mathrm{d}\phi = -\cos\phi \cdot \cos\phi - \int \cos\phi \cdot \sin\phi\,\mathrm{d}\phi$

iii) ✗ $\displaystyle\int 2x^2 e^{x^2}\,\mathrm{d}x = xe^{x^2} - \int e^{x^2}\,\mathrm{d}x$

iv) ✗ $\displaystyle\int \sin\phi \cdot \cos\phi\,\mathrm{d}\phi = \sin\phi \cdot \sin\phi - \int \cos\phi \cdot \sin\phi\,\mathrm{d}\phi$

v) ✓ Alle sind korrekte Anwendungen der partiellen Integration.

vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Alle Rechnungen sind richtig; die Antwort lautet also (v). In (ii) wird $\sin\phi$ integriert und $\cos\phi$ differenziert; in (iv) ist es umgekehrt. Obwohl die rechten Seiten verschieden aussehen, sind sie doch bis auf eine Integrationskonstante gleich, da nach Pythagoras $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$ ist. In (i) wird x integriert und $\ln x$ differenziert. In (iii) schreibt man den Integranden in der Form $x \cdot 2xe^{x^2}$ und integriert $2xe^{x^2}$ und differenziert x.

3. Lösen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

i) ✗ $x - \frac{1}{x+1} + C$

ii) ✓ $\frac{x^2}{x+1} + C$

iii) ✗ $\frac{2}{(x+1)^3}$

iv) ✗ $\frac{x^2+x+2}{x+1}+C$

v) ✗ keines davon

vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Wegen $(x+1)^2 = x^2+2x+1$ gilt

$$\frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} = 1-(x+1)^{-2}.$$

Damit können wir das gegebene Integral vereinfachen:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int 1\,\mathrm{d}x - \int (x+1)^{-2}\,\mathrm{d}x = x+(x+1)^{-1}+C\\ &= \frac{x^2+x+1}{x+1}+C = \frac{x^2}{x+1}+1+C\\ &= \frac{x^2}{x+1}+\tilde{C}.\end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass wir die Konstante 1 mit der Konstanten C zu einer neuen Konstanten $\tilde{C}$ zusammenfassen können.

4. Lösen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$.

i) ✗ $\frac{1}{2}\arccos(\frac{x}{2})+C$

ii) ✗ $\arccos(\frac{x}{2})+C$

iii) ✓ $\arcsin(\frac{x}{2})+C$

iv) ✗ $\frac{1}{2}\arcsin(\frac{x}{2})+C$

v) ✗ keines davon

vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Mit der Substitution $x =: 2\sin(t) \;\Leftrightarrow\; t = \arcsin(\frac{x}{2})$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}} &= \int \frac{2\cos(t)}{2\sqrt{1-\sin^2(t)}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\cos(t)}{\sqrt{\cos^2(t)}}\,\mathrm{d}t = \int 1\,\mathrm{d}t = t+C\\ &= \arcsin(\tfrac{x}{2})+C.\end{aligned}$$

5. Welches der folgenden Integrale stimmt im Allgemeinen nicht mit den anderen überein?

i) ✗ $\int_a^b (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$

ii) ✗ $\int_b^a (g(x)-f(x))\,\mathrm{d}x$

iii) ✗ $\int_a^b (f(t) - g(t))\,\mathrm{d}t$

iv) ✓ $\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}u$

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Das dritte Integral entsteht aus dem ersten durch die Substitution $x = t$. Das zweite Integral geht aus dem ersten durch Vertauschen der Integrationsgrenzen hervor. Das dabei entstehende negative Vorzeichen wurde in den Integranden eingebaut:

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x &= -\int_b^a (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \int_b^a -(f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_b^a (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Beim vierten Integral hingegen wurde die Integrationsvariable in u geändert, im Integranden steht jedoch weiterhin x. Formal handelt es sich hier also um das Integral der in u konstanten Funktion $u \mapsto f(x) - g(x)$, also etwas völlig anderes als im ersten Integral.

6. Wir rechnen

$$\begin{aligned}f(x) = (x-1)^4 = \int 4(x-1)^3\,\mathrm{d}x = \int (4x^3 - 12x^2 + 12x - 4)\,\mathrm{d}x \\ = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x = g(x)\end{aligned}$$

und erhalten daraus durch Einsetzen $1 = f(0) = g(0) = 0$. Wo liegt der Fehler?

i) ✗ Die binomische Formel wurde falsch angewendet.

ii) ✗ Man darf nicht einsetzen.

iii) ✓ Die Integrationskonstante fehlt.

iv) ✗ Es ist trotzdem richtig, weil man Konstanten vernachlässigen darf.

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Antwort 3 ist korrekt. Gleichungen für unbestimmte Integrale gelten immer nur bis auf eine Integrationskonstante. Diese darf man nur solange unterschlagen, wie auf beiden Seiten einer Gleichung ein unbestimmtes Integral stehen bleibt. Die falsche Rechnung illlustiert, was andernfalls passieren kann. Die vierte angebotene Antwort ist ein typisches Beispiel für eine Äusserung, bei der man sich nicht klar macht, was man eigentlich sagt.

7. Zwischenprüfung Winter 2014. Wenn das bestimmte Integral von -1 bis 1 der Funktion $f(x) = \cos x \cdot e^{-x^2}$ gleich k ist, so ist das bestimmte Integral von -1 bis 0 der Funktion $f(x) = \cos x \cdot e^{-x^2}$ gleich ...

i) ✗ $-k$.

ii) ✓ $\frac{k}{2}$.

iii) ✗ $2k$.

iv) ✗ $-\frac{k}{2}$.

v) ✗ $-2k$.

vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Es gilt

$$f(-x) = \cos(-x) \cdot e^{-(-x)^2} = \cos x \cdot e^{-x^2} = f(x),$$

der Funktionsgraph von f ist also symmetrisch bezüglich der y-Achse, es folgt also

$$k = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$$

und damit $\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{k}{2}$.

8. Zwischenprüfung Winter 2014. Sei $f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^3+2}}\,\mathrm{d}t$. Welche der folgenden Aussagen ist ***falsch***?

i) ✗ $f(1) > 0$

ii) ✓ $f(-1) > 0$

iii) ✗ $f(-1/2) < 0$

iv) ✗ $f(0) = 0$

v) ✗ weiss ich nicht

- **Lösung**
  $f(1) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^3+2}}\,\mathrm{d}t > 0$, da der Integrand auf $(0, 1)$ positiv ist.
- **Lösung**
  $f(-1) = \int_0^{-1} \frac{1}{\sqrt{t^3+2}}\,\mathrm{d}t = -\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{t^3+2}} < 0$, da der Integrand auf $(-1, 0)$ positiv ist.
- **Lösung**
  $f(-1/2) = \int_0^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{t^3+2}}\,\mathrm{d}t = -\int_{-1/2}^{0} \frac{1}{\sqrt{t^3+2}} < 0$, da der Integrand auf $(-1/2, 0)$ positiv ist.
- **Lösung**
  $f(0) = \int_0^0 \frac{1}{\sqrt{t^3+2}}\,\mathrm{d}t = 0$.

9. Zwischenprüfung Winter 2014. Sei $f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^3+2}}\,\mathrm{d}t$. Welche der folgenden Aussagen über $f'(1)$ ist richtig?

i) ✗ $f'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ii) ✗ $f'(1)$ kann man nicht bestimmen, weil man die Stammfunktion nicht kennt.

iii) ✓ $f'(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

iv) ✗ $f'(1) = \operatorname{arsinh}(1)$

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Das ist eine Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, es gilt $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3+2}}$. Damit gilt $f'(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

10. Zwischenprüfung Winter 2014. Für $0 < a < b$ und $0 < c < d$ sei $f : [a, b] \to [c, d]$ eine stetig differenzierbare, streng monoton wachsende und surjektive Funktion mit Umkehrfunktion f^{-1}. Dann ist $\int_c^d f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y = \ldots$

i) ✗ $bd - ac - \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$.

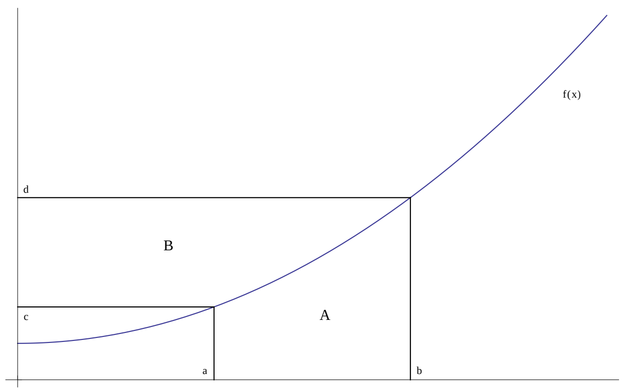
ii) ✓ $bd - ac - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

iii) ✗ $\frac{1}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$.

iv) ✗ $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung



Da f streng monoton wachsend und surjektiv ist, gilt $f(a) = c$ und $f(b) = d$, (siehe Skizze). Den Graphen von f^{-1} sehen wir, wenn wir die Rollen der x- und y-Achse vertauschen, es gilt also $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A$ und $\int_c^d f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y = B$. Die korrekte Beziehung lässt sich nun einfach aus der Skizze ablesen.

Rechnerisch erhalten wir das Resultat durch Substitution $y = f(x)$ (dann gilt $\mathrm{d}y =$

$f'(x)\mathrm{d}x)$ und anschliessender partieller Integration.

$$\begin{aligned}\int_c^d f^{-1}(y)\mathrm{d}y &= \int_a^b x \cdot f'(x)\mathrm{d}x \\ &= [x \cdot f(x)]_a^b - \int_a^b 1 \cdot f(x)\mathrm{d}x \\ &= bd - ac - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

11. Zwischenprüfung Winter 2015. Sei n eine nicht-negative ganze Zahl. Folgende Gleichung

$$\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)^n \,\mathrm{d}x$$

gilt ...

i) ✗ nur für $n = 0$.
ii) ✗ nur für alle geraden n.
iii) ✗ nur für alle ungeraden n.
iv) ✓ für alle n.
v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Wir substituieren $x = 1 - y$ und erhalten mit $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}y$

$$\int_0^1 x^n \,dx = -\int_1^0 (1-y)^n \,\mathrm{d}y = \int_0^1 (1-y)^n \,\mathrm{d}y.$$

12. Zwischenprüfung Winter 2015.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x = \dots$$

i) ✗ $\frac{\sqrt{3}}{2} - 1$
ii) ✗ $\frac{\pi}{6}$
iii) ✗ $\frac{\pi}{3}$
iv) ✓ $2 - \sqrt{3}$
v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Wir rechnen

$$(\sqrt{1-x^2})' = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Folglich gilt

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} \,dx = -2\left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = -2\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) = 2 - \sqrt{3}.$$