Analysis D-BAUG
Dr. Meike Akveld HS 2015

MC-Serie 13 - Anwendungen der Integralrechnung I

1. Eine geschlossene Kurve $[0,1] \to \mathbb{R}^2 \colon t \mapsto (x(t), y(t))$ wird um den Faktor $a > 0$ gestreckt, das heisst, man erhält eine neue Kurve $[0,1] \to \mathbb{R}^2 \colon t \mapsto (ax(t), ay(t))$. Welche Aussage über die Bogenlänge ist wahr?

i) ✓ Die Bogenlänge der neuen Kurve ist das a-te Vielfache der Bogenlänge der alten Kurve.

ii) ✗ Die Bogenlänge der neuen Kurve ist das $\sqrt{a}$-te Vielfache der Bogenlänge der alten Kurve.

iii) ✗ Die Bogenlänge der neuen Kurve ist das a^2-te Vielfache der Bogenlänge der alten Kurve.

iv) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Es gilt

$$\int_0^1 \sqrt{(a\dot{x}(t))^2 + (a\dot{y}(t))^2}\,\mathrm{d}t = a \int_0^1 \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

2. Eine geschlossene Kurve $[0,1] \to \mathbb{R}^2 \colon t \mapsto (x(t), y(t))$ wird um den Faktor $a > 0$ gestreckt, das heisst, man erhält eine neue Kurve $[0,1] \to \mathbb{R}^2 \colon t \mapsto (ax(t), ay(t))$. Welche über die eingeschlossene Fläche ist wahr?

i) ✗ Die eingeschlossene Fläche der neuen Kurve ist das $\sqrt{a}$-te Vielfache der eingeschlossenen Fläche der alten Kurve.

ii) ✗ Die eingeschlossene Fläche der neuen Kurve ist das a-te Vielfache der eingeschlossenen Fläche der alten Kurve.

iii) ✓ Die eingeschlossene Fläche der neuen Kurve ist das a^2-te Vielfache der eingeschlossenen Fläche der alten Kurve.

iv) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Es gilt

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (ax(t)a\dot{y}(t) - a\dot{x}(t)ay(t))\,\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\int_0^1 (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t))\,\mathrm{d}t.$$

3. Wir bezeichnen für $i = 1, 2$ mit K_i den Rotationskörper, der durch Rotation einer nichtnegativen stetigen Funktion $f_i \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ an der x-Achse entsteht. Welche Aussagen sind wahr?

i) ✗ Falls für ein $a > 0$ und für alle $t \in [0,1]$ gilt $f_1(t) = af_2(t)$, gilt $\mathrm{vol}(K_1) = a\mathrm{vol}(K_2)$.

ii) ✗ Falls für ein $a > 0$ und für alle $t \in [0,1]$ gilt $f_1(t) = af_2(t)$, gilt $\mathrm{vol}(K_1) = a^3\mathrm{vol}(K_2)$.

iii) ✓ Falls für ein $a > 0$ und für alle $t \in [0,1]$ gilt $f_1(t) = af_2(t)$, gilt $\mathrm{vol}(K_1) = a^2\mathrm{vol}(K_2)$.

iv) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Es gilt

$$\mathrm{vol}(K_1) = \pi \int_0^1 (af(x))^2 \,\mathrm{d}x = \pi a^2 \int_0^1 f(x)^2 \,\mathrm{d}x = a^2\mathrm{vol}(K_2).$$

4. Wir bezeichnen für $i = 1, 2$ mit K_i den Rotationskörper, der durch Rotation einer nichtnegativen stetigen Funktion $f_i\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ an der x-Achse entsteht. Welche Aussagen sind wahr?

i) ✗ Der Rotationskörper, der entsteht, wenn man f_1 und f_2 addiert und rotiert, hat Volumen $\mathrm{vol}(K_1) + \mathrm{vol}(K_2)$.

ii) ✗ Falls f_1 und f_2 dasselbe Integral haben, haben K_1 und K_2 dasselbe Volumen.

iii) ✓ Falls für alle $t \in [0,1]$ gilt $f_1(t) \leq f_2(t)$, gilt $\mathrm{vol}(K_1) \leq \mathrm{vol}(K_2)$.

iv) ✗ Der Rotationskörper, der entsteht, wenn man f_1 und f_2 multipliziert und rotiert, hat Volumen $\mathrm{vol}(K_1) \cdot \mathrm{vol}(K_2)$.

v) ✗ weiss ich nicht

- **Lösung**
(i) Nein. Zum Beispiel $f_1(x) = f_2(x) = 1$. Der Rotationskörper, der entsteht, wenn man f_1 und f_2 addiert und rotiert, hat Volumen $4\pi \neq \pi + \pi$.
- **Lösung**
(ii) Nein. Sei z.B. $f_1(x) = 1$ die konstante Funktion und $f_2(x) = 2x$. Dann ist K_1 ein Zylinder mit Volumen π und K_2 ein Kegel mit Volumen $4/3\pi$. Auf der anderen Seite sind die beiden Integrale aber gleich, nämlich 1. Intuitiv kann man sich das so erklären, dass Mengen, die weit weg von der x-Achse liegen, bei der Rotation um die x-Achse einen grösseren Weg zurücklegen und deshalb mehr Volumen produzieren.
- **Lösung**
(iii) Das sieht man direkt aus der Formel.
- **Lösung**
(iv) Nein. Zum Beispiel $f_1(x) = f_2(x) = 1$. Der Rotationskörper, der entsteht, wenn man f_1 und f_2 multipliziert und rotiert, hat Volumen $\pi \neq \pi \cdot \pi$.

5. Gegeben sei die Parameterdarstellung einer Astroide:

$$\begin{aligned} x(t) &= a\cos^3 t \\ y(t) &= a\sin^3 t \quad a>0\,,\ \ 0\le t\le 2\pi \end{aligned}$$

Berechnen Sie das Volumen V des Rotationskörpers, der entsteht, wenn die Astroide um die x-Achse gedreht wird.

i) ✗ $V = \frac{16}{105}a^4\pi$
ii) ✗ $V = \frac{8}{57}a^2\pi$
iii) ✗ $V = \frac{8}{57}a^3\pi$
iv) ✓ $V = \frac{32}{105}a^3\pi$
v) ✗ $V = \frac{32}{105}a^4\pi$
vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung

Den Rotationskörper erhalten wir durch rotieren der ersten Hälfte der Kurve. Da die Kurve in die negative y-Richtung parametrisiert ist, müssen wir das Vorzeichen in der Formel umkehren. Es gilt

$$\begin{aligned} V &= -\pi\int_0^{\pi}(y(t))^2\cdot\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\pi\int_0^{\pi}(a\sin^3 t)^2\cdot(3a\cos^2 t\cdot(-\sin t))\,\mathrm{d}t \\ &= 3a^3\pi\int_0^{\pi}\sin^7 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= 3a^3\pi\int_0^{\pi}\sin t(1-\cos^2 t)^3\cos^2 t\,\mathrm{d}t \\ &\overset{\substack{u=\cos t\\ \mathrm{d}u=-\sin t\mathrm{d}t}}{=} -3a^3\pi\int_1^{-1}(1-u^2)^3u^2\,\mathrm{d}u \\ &= 3a^3\pi\int_{-1}^{1}(u^2-3u^4+3u^6-u^8)\,\mathrm{d}u \\ &= 3a^3\pi\left[\frac{u^3}{3}-\frac{3u^5}{5}+\frac{3u^7}{7}-\frac{u^9}{9}\right]_{-1}^{1} \\ &= 6a^3\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{5}+\frac{3}{7}-\frac{1}{9}\right) = \frac{32}{105}a^3\pi. \end{aligned}$$

6. Die Kurve, gegeben durch

$$(x(t),y(t)) = e^{-t}\,(\cos(2t),\sin(2t)) \quad ,\ \ 0\le t\le\pi/2$$

rotiert um die x-Achse.
Welche Oberfläche O entsteht?

i) ✗ $O = \frac{\sqrt{5}}{4}\pi(e^{-\pi} + 1)$

ii) ✓ $O = \frac{\sqrt{5}}{2}\pi(e^{-\pi} + 1)$

iii) ✗ $O = \pi(e^{-\pi} - 1)$

iv) ✗ $O = \frac{\sqrt{5}}{2}\pi(e^{-\pi} - 1)$

v) ✗ $O = \frac{\sqrt{5}}{4}\pi(e^{-\pi} - 1)$

vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung

Wir berechnen zuerst

$$(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (-e^{-t}\cos(2t) + e^{-t}(-\sin(2t)\cdot 2), -e^{-t}\sin(2t) + e^{-t}(\cos(2t)\cdot 2)).$$

Folglich erhalten wir

$$\begin{aligned}\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} &= e^{-t}\sqrt{((\cos(2t) + 2\sin(2t))^2 + (\sin(2t) - 2\cos(2t))^2} \\ &= e^{-t}\sqrt{5\cos^2(2t) + 5\sin^2(2t)} = \sqrt{5}e^{-t}.\end{aligned}$$

Für die Oberfläche gilt also

$$\begin{aligned}O &= 2\pi \int_0^{\pi/2} y(t)\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/2} e^{-t}\sin(2t)\sqrt{5}e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\pi\sqrt{5}\int_0^{\pi/2} e^{-2t}\sin(2t)dt \\ &= 2\sqrt{5}\pi\frac{e^{-2t}}{4+4}(-2\sin(2t) - 2\cos(2t))\Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2}\pi(e^{-\pi} + 1),\end{aligned}$$

wobei die Formel

$$\int e^{ax}\sin(bx)dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\sin(bx) - b\cos(bx)) + C \quad , \quad a, b, C \in \mathbb{R}$$

benutzt wurde.

7. Zwischenprüfung Winter 2015. Gegeben sei eine Kurve $r\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2, r(t) = \binom{x(t)}{y(t)}$. Betrachte die Fläche A, die von der Kurve r, der y-Achse und den beiden horizontalen Geraden durch $r(0)$ und $r(1)$ begrenzt wird. Wir rotieren nun diese Fläche um die x-Achse. Wie gross ist das Volumen des so erzeugten Rotationskörpers?

i) ✓ $2\pi\int_0^1 x(t)y(t)y'(t)\,\mathrm{d}t$

pa25.{ps,eps,pdf} not found (or no BBox)

ii) ✗ $2\pi \int_0^1 x(t)y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t$

iii) ✗ $2\pi \int_0^1 y^2(t)x'(t)\,\mathrm{d}t$

iv) ✗ $2\pi \int_0^1 y^2(t)x(t)\,\mathrm{d}t$

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung

Ein schmaler Streifen auf der Höhe $y(t)$ hat die Fläche $x(t)\,\mathrm{d}y(t) = x(t)y'(t)\,\mathrm{d}t$. Rotieren wir diesen Streifen um die x-Achse, so erhalten wir einen Hohlzylinder mit Volumen $2\pi y(t)x(t)y'(t)\,\mathrm{d}t$. Für das Volumen des gesamten Rotationskörpers gilt nun

$$V = 2\pi \int_0^1 x(t)y(t)y'(t)\,\mathrm{d}t.$$