Analysis D-BAUG
Dr. Meike Akveld HS 2015

MC-Serie 14 - Anwendungen der Integralrechnung II

1. Gegeben seien ein Körper und fünf Achsen mit jeweils Abstand r (siehe Skizze).

pa13$_5 mc.\{ps, eps, pdf\} notfound(ornoBBox)$

Bezüglich welcher Achse ist das Trägheitsmoment am kleinsten?

i) ✗ Achse A,
ii) ✓ Achse B.
iii) ✗ Achse C,
iv) ✗ Achse D,
v) ✗ Achse E,
vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Je weiter die Masse von der Rotationsachse entfernt ist, desto grösser ist das Trägheitsmoment. Folglich ist das Trägheitsmoment zur Achse, die durch den Körperschwerpunkt geht, am kleinsten.

2. Gegeben seien ein Körper und fünf Achsen mit jeweils Abstand r (siehe Skizze).

pa13$_5 mc.\{ps, eps, pdf\} notfound(ornoBBox)$

Das Trägheitsmoment bezüglich der Achse B, welche durch den Schwerpunkt geht, sei $\Theta_B = 0.64mr^2$. Welches Trägheitsmoment ist dann $\Theta = 4.64mr^2$?

i) ✗ Θ_A,
ii) ✗ Θ_B,
iii) ✗ Θ_C,
iv) ✓ Θ_D,
v) ✗ Θ_E.
vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Nach dem Satz von Steiner gilt $\Theta = \Theta_B + md^2$ wobei d der Abstand zur Achse B bezeichnet. Wir erhalten $d = 2r$ und folglich ist es Θ_D.

3. Gegeben seien ein Körper und fünf Achsen mit jeweils Abstand r (siehe Skizze).

pa13$_5 mc.\{ps, eps, pdf\} notfound(ornoBBox)$

Das Trägheitsmoment bezüglich einer weiteren parallelen Achse X sei $\Theta_X = 6mr^2$. Wo könnte diese Achse liegen?

i) ✗ Zwischen den Achsen A und B,

ii) ✗ zwischen den Achsen B und C,

iii) ✗ zwischen den Achsen C und D,

iv) ✓ zwischen den Achsen D und E,

v) ✗ rechts von der Achse E.

vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Mit dem Satz von Steiner erhalten wir für den Abstand der Achse X zum Schwerpunkt $d \approx 2.32r$. Somit liegt die Achse X entweder zwischen den Achsen D und E oder links von der Achse A.

4. Aus sechs identischen Stäben mit Länge a und Masse m bilden wir ein gleichmässiges Sechseck. Wie gross ist das Trägheitsmoment dieses Sechsecks bezüglich der Achse durch den Mittelpunkt S und senkrecht zur Ebene?

pa13$_6 mc.\{ps, eps, pdf\} notfound(ornoBBox)$

i) ✗ $6ma^2$

ii) ✗ $\frac{5}{6}ma^2$

iii) ✗ $\frac{3}{5}ma^2$

iv) ✗ $\frac{5}{3}ma^2$

v) ✗ $\frac{6}{5}ma^2$

vi) ✓ $5ma^2$

vii) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Aus der Vorlesung kennen wir das Trägetismoment eines Stabes der Länge a und Masse m bezüglich einer Achse durch den Mittelpunkt:

$$\Theta_{\text{Stab}} = \frac{1}{12}ma^2. \tag{1}$$

Der Abstand des Mittelpunktes des Stabes zur Achse beträgt

$$d = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a. \tag{2}$$

pl13$_6 mc.\{ps, eps, pdf\} notfound(ornoBBox)$

Folglich erhalten wir mit Hilfe des Satzes von Steiner

$$\Theta = 6 \cdot \left(\Theta_{\text{Stab}} + md^2\right) = 6 \cdot \left(\frac{1}{12}ma^2 + \frac{3}{4}ma^2\right) = 5ma^2. \tag{3}$$

5. Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines Quadrates mit Kantenlänge a und Masse m bezüglich der Achse durch eine Ecke und senkrecht zur Fläche.

i) ✗ $\frac{1}{6}ma^2$
ii) ✗ $\frac{1}{2}ma^2$
iii) ✗ $\frac{1}{3}ma^2$
iv) ✓ $\frac{2}{3}ma^2$
v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Aus der Vorlesung wissen wir, dass für das Trägheitsmoment Θ_z um die z-Achse eines flachen Körpers, der in der xy-Ebene liegt, folgendes gilt:

$$\Theta_z = \Theta_x + \Theta_y \tag{4}$$

Wir platzieren das Quadrat so, dass eine Ecke im Ursprung und zwei Seiten auf der positiven x-, bwz. y-Achse liegen.

Ein Streifen der Breite $\mathrm{d}x$ im Abstand x zur x-Achse hat dann die Masse $\frac{m}{a}\mathrm{d}x$ und es gilt

$$\Theta_x = \int_0^a x^2 \tfrac{m}{a}\mathrm{d}x = \tfrac{a^3}{3}\tfrac{m}{a} = \tfrac{1}{3}ma^2. \tag{5}$$

Da $\Theta_y = \Theta_x$ folgt

$$\Theta_z = 2\Theta_x = \tfrac{2}{3}ma^2. \tag{6}$$