MC-Ferienserie

1. Die folgende Aussage: $\forall z \in \mathbb{C}\, \exists w \in \mathbb{C} : z < w$ ist

i) ✓ falsch
ii) ✗ wahr
iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Auf den komplexen Zahlen gibt es keine natürliche Ordnungsrelation. Daher existiert auch keine komplexe Zahl, die grösser als eine andere ist. Die Aussage ist somit falsch.

2. Sei z eine komplexe Zahl in der oberen Halbebene

$$H_+ = \{w \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(w) > 0\}$$

so gilt für die beiden Zahlen $-i^2 \cdot z$ und $\frac{-1}{\bar{z}}$

i) ✓ $-i^2 \cdot z \in H_+$ und $\frac{-1}{\bar{z}} \notin H_+$
ii) ✗ $-i^2 \cdot z \in H_+$ und $\frac{-1}{\bar{z}} \in H_+$
iii) ✗ $-i^2 \cdot z \notin H_+$ und $\frac{-1}{\bar{z}} \notin H_+$
iv) ✗ $-i^2 \cdot z \notin H_+$ und $\frac{-1}{\bar{z}} \in H_+$
v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Es gilt $-i^2 \cdot z = z$ und $\frac{-1}{\bar{z}} = \frac{-z}{\bar{z}z} = \frac{-z}{|z|^2}$. $-z$ ist die Spiegelung von z am Ursprung und die Multiplikation mit einer positiven reellen Zahl eine Streckung bezüglich dem Ursprung. Folglich ist $-i^2 \cdot z \in H_+$ und $\frac{-1}{\bar{z}} \notin H_+$.

3. Bestimmen Sie $\sqrt[4]{-8 - 8\sqrt{3}i}$

i) ✗ $1 + \sqrt{3}i$
ii) ✗ $\sqrt{3} + i$
iii) ✓ $\sqrt{3} - i$
iv) ✗ $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$
v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Wir schreiben zuerst $z = -8 - 8\sqrt{3}i$ in Polarform. Es gilt $r = |z| = 16$ und $\varphi = \arg z = \pi + \arctan(\sqrt{3}) = \frac{4\pi}{3}$, also $z = 16e^{\frac{4\pi}{3}} = 16e^{-\frac{2\pi}{3}}$. Wir erhalten $\sqrt[4]{z} = 2e^{-\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} - i$.

Bemerkung: Wir verwenden die Konvention, dass die n-te Wurzel aus $z \in \mathbb{C}$ demjenigen $w \in \mathbb{C}$ entspricht, welches $w^n = z$ und $-\frac{\pi}{n} < \arg(w) \leq \frac{\pi}{n}$ erfüllt.

4. Für welchen Wert von k existiert folgender Grenzwert

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - x + k}{x - 4}.$$

i) ✓ -12
ii) ✗ -4
iii) ✗ 3
iv) ✗ 7
v) ✗ Für kein einziges k.
vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Es gilt

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - x + k}{x - 4} = \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+3)}{x-4} + \frac{12+k}{x-4} = \lim_{x\to 4} x + 3 + \frac{12+k}{x-4} = \begin{cases} 7, & k = -12, \\ \infty, & k \neq -12. \end{cases}$$

5. Ein Student muss die folgende Reihe auf Konvergenz / Divergenz überprüfen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + |\sin(k)|}$$

und geht dabei folgendermasse vor:

Schritt 1:

$$0 < \frac{1}{k + |\sin(k)|} < \frac{1}{k} \quad \forall k \geq 1$$

Schritt 2: Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert.

Schritt 3: Weil die harmonische Reihe divergiert, divergiert auch unsere Reihe nach dem Majorantenkriterium.

Was meinen Sie zu diesem Vorgang?

i) ✗ Schritt I ist falsch.
ii) ✗ Schritt II ist falsch.
iii) ✓ Schritt III ist falsch.
iv) ✗ Der Student hat recht.
v) ✗ weiss ich nicht

- **Lösung**
  Um hier Divergenz zu zeigen, muss man eine divergente Minorante finden. Zum Beispiel gilt: $\frac{1}{k+|\sin k|} > \frac{1}{2k}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert (harmonische Reihe).

- **Lösung**
  Mit dem Majorantenkriterium kann nur Konvergenz einer Reihe gezeigt werden.

6. Welche der folgenden Reihen konvergieren nach dem Quotientenkriterium?

i) ✓ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

ii) ✗ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

iii) ✗ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

iv) ✓ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

v) ✗ weiss ich nicht

- **Lösung**
  (i) $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \to 0 < 1$
- **Lösung**
  (ii) $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n^{\frac{3}{2}}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{3}{2}} \to 1$, folglich kann hier mit dem Quotientenkriterium keine Aussage zur Konvergenz gemacht werden.
- **Lösung**
  (iii) $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(n)^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e > 1$
- **Lösung**
  (iv) $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{1}{2}\frac{n+1}{n} \to \frac{1}{2} < 1$

7. Zwischenprüfing Winter 2014. Welche der folgenden Reihen konvergieren?

$$\text{I.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}; \qquad \text{II.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n}; \qquad \text{III.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

i) ✗ keine einzige

ii) ✗ nur I und II

iii) ✗ nur I und III

iv) ✓ nur II

v) ✗ nur III

vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Die Glieder von I bilden keine Nullfolge, also ist I divergent. II ist die Leibniz-Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ und damit konvergent. III ist die harmonische Reihe und divergent.

8. Für welchen Parameter $a \in \mathbb{R}$ gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{7} = -\frac{1}{10}$

i) ✗ $a = \frac{17}{7}$

ii) ✗ $a = -\frac{3}{7}$

iii) ✗ $a = -\frac{7}{17}$

iv) ✗ $a = \frac{7}{3}$

v) ✓ Es gibt keinen solchen Parameter $a \in \mathbb{R}$.

vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Die Reihe Konvergiert nur für $|a| < 1$. In diesem Fall gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{7} = \frac{1}{7} \sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{1-a} > \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{14}.$$

Folglich existiert kein $a \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{7} = -\frac{1}{10}$.

9. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = 1$ und $f(1) = 0$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

i) ✗ f ist injektiv

ii) ✗ $\exists y \in [0,1]$ mit $f(\frac{1}{2}) = y$

iii) ✓ $\exists x \in [0,1]$ mit $f(x) = x$

iv) ✓ $\exists x \in [0,1]$ mit $f(x) = \frac{1}{2}$

v) ✗ weiss ich nicht

- **Lösung**
  (i) $f(x) = \cos(\frac{3\pi}{2}x)$ ist nicht injektiv ($f(\frac{1}{3}) = 0 = f(1)$).
- **Lösung**
  (ii) Der Funktionswert an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ muss nicht im Intervall $[0,1]$ liegen. Ein Beispiel ist $f(x) = -6x^2 + 5x + 1$.
- **Lösung**
  (iii) Betrachte $h(x) = f(x) - x$. Die Funktion h ist stetig und es gilt $h(0) = 1$ und $h(1) = -1$. Folglich hat h nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle und somit f einen Fixpunkt in $[0,1]$.
- **Lösung**
  (iv) Dies folgt mit dem Zwischenwertsatz.

10. An wie viele Stellen ist die Funktion $f(x) = \big||x| - 3\big|$ *nicht* differenzierbar?

i) ✗ an 0 Stellen

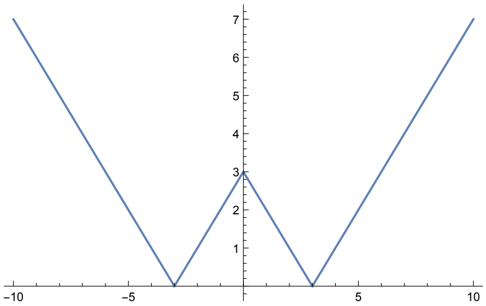
ii) ✗ an 1 Stelle

iii) ✗ an 2 Stellen

iv) ✓ an 3 Stellen

v) ✗ an 4 Stellen

vi) ✗ weiss ich nicht



Lösung
Die Funktion hat an den Stellen $x = -3, 0, 3$ einen "Knick". Dazwischen ist sie linear und daher differenzierbar.

11. Seien f und g differenzierbare Funktionen mit

$$f(1) = 2, f'(1) = 3, f'(2) = -4$$

$$g(1) = 2, g'(1) = -3, g'(2) = 5$$

Sei $h(x) = f(g(x))$ so gilt $h'(1) =$

i) ✗ 0
ii) ✗ -9
iii) ✗ -4
iv) ✗ 15
v) ✓ 12
vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Es gilt

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

und folglich

$$h'(1) = f'(g(1)) \cdot g'(1) = f'(2) \cdot (-3) = (-4)(-3) = 12.$$

12. Das Maximum der Funktion $f(x) = \left|\sin x - \frac{1}{2}\right|$ ist

i) ✗ $\frac{3\pi}{2}$
ii) ✗ $\frac{\pi}{2}$
iii) ✗ $\frac{1}{2}$
iv) ✗ 1
v) ✓ $\frac{3}{2}$
vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Die Dreiecksungleichung liefert

$$f(x) = \left|\sin x - \tfrac{1}{2}\right| \leq |\sin x| + \tfrac{1}{2} \leq \tfrac{3}{2}.$$

Zudem gilt

$$f\left(\tfrac{3\pi}{2}\right) = \left|-1 - \tfrac{1}{2}\right| = \tfrac{3}{2}.$$

13. $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{2+h}{2}\right) =$

i) ✗ 0
ii) ✓ $\frac{1}{2}$
iii) ✗ 1
iv) ✗ e^2
v) ✗ weiss ich nicht

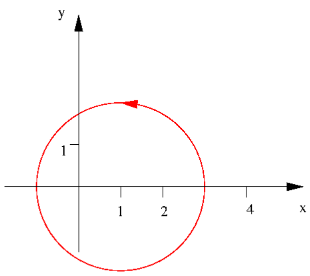
Lösung
Durch Umformen erhalten wir einen Differenzenquotient:

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{2+h}{2}\right) &= \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+\frac{h}{2}) - \ln(1)}{h} \\
&\overset{h=2t}{=} \lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+t) - \ln(1)}{2t} \\
&= (\tfrac{1}{2}\ln)'(1) = \tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

Alternativ können wir Bernoulli-de l'Hôpital anwenden:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{2+h}{2}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{\ln\left(\frac{2+h}{2}\right)}^{\to 0}}{\underbrace{h}_{\to 0}} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2}{2+h} \cdot \frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

14. Welche der folgenden Parametrisierungen beschreiben die folgende Kurve?



i) ✗ $(x(t), y(t)) = (1 - 2\cos(-t), -2\sin(-t))$
ii) ✗ $(x(t), y(t)) = (1 + 2\cos(-t), 2\sin(-t))$

iii) ✓ $(x(t), y(t)) = (1 - 2\cos(-t), 2\sin(-t))$
iv) ✓ $(x(t), y(t)) = (1 + 2\cos(-t), -2\sin(-t))$
v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Alle vier Parametrisierungen beschreiben einen Kreis mit Mittelpunkt $(1, 0)$ und Radius 2. Dabei sind die erste und die letzte Kurve im Uhrzeigersinn, die mittleren beiden im Gegenuhrzeigersinn orientiert. Beachte dass $\cos(-t) = \cos(t)$ und $\sin(-t) = -\sin(t)$.

15. Sei $f(x) = x^2 \ln(1 + x)$. Was ist die beste Approximation von $f(0.1)$?

i) ✗ 0.00098
ii) ✓ 0.00095
iii) ✗ 0.00090
iv) ✗ 0.00092
v) ✗ 0.00100
vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung

Die Reihenentwicklung von $\ln(1 + x)$ ist gegeben durch

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

Das Taylorpolynom 4. Ordnung von f ist also

$$T_4(x) = x^3 - \frac{x^4}{2}$$

und folglich $f(0.1) \approx T_4(0.1) = 0.001 - 0.00005 = 0.00095$. Wir überprúfen noch den Fehler.

$$\begin{aligned} |f(0.1) - T_4(0.1)| &= \left| \frac{f^{(5)}(0.1)}{5!} \hat{x}^5 \right| \text{ für ein } \hat{x} \in [0, 0.1] \\ &= \frac{\hat{x}^5}{3} \text{ für ein } \hat{x} \in [0, 0.1] \\ &\leq \frac{(0.1)^5}{3} \leq 0.0000034. \end{aligned}$$

Somit ist $T_4(0.1)$ die beste der obigen Abschätzungen.

16. Eine Funktion f hat die folgende Taylorreihe um $x_0 = 0$

$$\frac{x^4}{2!} + \frac{x^5}{3!} + \frac{x^6}{4!} + \dots + \frac{x^{n+3}}{(n+1)!} + \dots$$

Bestimme eine geschlossene Formel für $f(x)$

i) ✗ $-3x\sin(x)+3x^2$

ii) ✗ $-\cos(x^2)+1$

iii) ✗ $e^{x^2}-x^2-1$

iv) ✗ $-x^2\cos(x)+x^2$

v) ✓ $x^2e^x-x^3-x^2$

vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung

$$\begin{aligned}\frac{x^4}{2!}+\frac{x^5}{3!}+\frac{x^6}{4!}+\ldots+\frac{x^{n+3}}{(n+1)!}+\ldots &= x^2\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\ldots\right)\\ &= x^2(e^x-x-1)\\ &= x^2e^x-x^3-x^2.\end{aligned}$$

17. Geben Sie die Formel für die n-te Untersumme U_n der Funktion $f(x)=3^x$ im Intervall $[0,2]$ an.

i) ✓ $\frac{1}{n}\cdot\frac{16}{9^{\frac{1}{n}}-1}$

ii) ✗ $\frac{1}{n}\cdot\frac{16\cdot 9^{\frac{1}{n}}}{9^{\frac{1}{n}}-1}$

iii) ✗ $\sum_{k=1}^{n}\frac{2\cdot 3^x}{n}$

iv) ✗ $\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{3^{\frac{1}{n}}-1}$

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung

Wir bemerken zuerst, dass die Funktion f auf dem Intervall $[0,2]$ monoton wachsend ist. Der kleinste Funktionswert im Teilintervall $[\frac{2k}{n},\frac{2(k+1)}{n}]$ ist also $f(\frac{2k}{n})$. Somit gilt

$$\begin{aligned}U_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2}{n}\cdot f\left(\frac{2k}{n}\right) &= \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}3^{(\frac{2k}{n})}\\ &= \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(9^{\frac{1}{n}})^k=\frac{2}{n}\cdot\frac{1-(9^{\frac{1}{n}})^n}{1-9^{\frac{1}{n}}}\\ &= \frac{2}{n}\cdot\frac{9-1}{9^{\frac{1}{n}}-1}=\frac{1}{n}\cdot\frac{16}{9^{\frac{1}{n}}-1}.\end{aligned}$$

18.

$$\int_{-1}^{0} \frac{x}{x^3-8}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi\sqrt{3}}{36} - \frac{1}{12}\ln 3$$

i) ✓ wahr

ii) ✗ falsch

iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung

Wir führen eine Partialbruchzerlegung durch. Es gilt $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$ gilt. Der zweite Faktor ist nicht weiter in reelle Polynome zerlegbar, da er eine negative Diskriminante hat. Daher wählen wir den Ansatz

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^3-8} &= \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4} \\ &= \frac{Ax^2+2Ax+4A+Bx^2-2Bx+Cx-2C}{x^3-8} \\ &= \frac{(A+B)x^2+(2A-2B+C)x+(4A-2C)}{x^3-8}.\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert das lineare Gleichungsystem

$$\begin{aligned} A+B&=0 \\ 2A+2B+C&=1 \\ 4A-2C&=0 \end{aligned}$$

mit Lösung $A=\frac{1}{6}, B=-\frac{1}{6}, C=\frac{1}{3}$. Folglich gilt

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0}\frac{x}{x^3-8}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{6}\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{x-2}{x^2+2x+4}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{6}\left([\ln(|x-2|)]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0}\frac{x-2}{(x+1)^2+3}\,\mathrm{d}x\right) \\
&\overset{y=x+1}{=} \frac{1}{6}\left(\ln(2)-\ln(3)-\int_{0}^{1}\frac{y-3}{y^2+3}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(\ln(2)-\ln(3)-\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\frac{2y}{y^2+3}\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\frac{3}{y^2+3}\,\mathrm{d}x\right) \\
&\overset{t=\frac{1}{\sqrt{3}}y}{=} \frac{1}{6}\left(\ln(2)-\ln(3)-\frac{1}{2}\left[\ln(y^2+3)\right]_0^1+\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{\sqrt{3}}{t^2+1}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(\ln(2)-\ln(3)-\frac{1}{2}\left(\ln(4)-\ln(3)\right)+\sqrt{3}\left[\arctan(t)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\ln(3)+\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \\
&= \frac{\pi\sqrt{3}}{36}-\frac{1}{12}\ln 3
\end{aligned}$$

Wobei wir benutzt haben, dass $\frac{1}{2}\ln(4) = \ln(2)$.

19. $\int_0^1 \sqrt{x^2 - 2x + 1}\,\mathrm{d}x =$

i) ✗ -1

ii) ✗ $-\frac{1}{2}$

iii) ✗ 1

iv) ✓ $\frac{1}{2}$

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{x^2 - 2x + 1}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \sqrt{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 |x-1|\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (1-x)\,\mathrm{d}x \\ &= 1 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Beachte, dass $x - 1$ auf $[0, 1]$ negativ ist.

20. Bestimmen Sie $\int_0^{0.3} x^2 \cdot e^{-x^2}\,dx$ bis auf drei Dezimalstellen korrekt.

i) ✗ 0.008

ii) ✓ 0.009

iii) ✗ 0.082

iv) ✗ 0.090

v) ✗ 0.098

vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung

$$\begin{aligned}\int_0^{0.3} x^2 \cdot e^{-x^2}\,dx &= \int_0^{0.3} x^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!}\,dx = \int_0^{0.3} \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} - \dots\right) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{10} + \frac{x^7}{42} - \dots\right]_0^{0.3} \\ &\approx 0.009 - 0.000243 + 0.00000347 - \ldots \approx 0.009.\end{aligned}$$

21. Zwischenprüfung Winter 2014. Betrachten Sie eine kreisförmige Stadt, die von einer geraden Autobahn durchquert wird, welche genau durchs Stadtzentrum geht. Der Radius der Stadt ist 3 Kilometer und die Bevölkerungsdichte (Anzahl Personen pro Quadratkilometer) ist gegeben durch

$$f(r) = 12000 - 2000r,$$

wobei r die Distanz zur Autobahn in Kilometern ist. Welche der folgenden Formeln berechnet die Einwohnerzahl der Stadt?

i) ✗ $\int_0^3 (12000 - 2000r)\,\mathrm{d}r$

ii) ✓ $4\int_0^3 (12000 - 2000r)\sqrt{9 - r^2}\,\mathrm{d}r$

iii) ✗ $2\int_0^3 2\pi r(12000 - 2000r)\,\mathrm{d}r$

iv) ✗ $2\int_0^3 (12000 - 2000r)\sqrt{9 - r^2}\,\mathrm{d}r$

v) ✗ $\int_0^3 2\pi r(12000 - 2000r)\,\mathrm{d}r$

vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung

Wie in der Skizze nehmen wir an, dass die Autobahn die y-Achse ist. Wir betrachten infinitesimal dünne Balken mit Breite $\mathrm{d}r$ und Höhe $h(r)$, wobei $h(r) = \sqrt{9 - r^2}$. Da die Bevölkerungsdichte nur von der Distanz zur Autobahn abhängt, ist diese auf einem solchen dünnen Balken nahezu konstant. Die Einwohnerzahl auf dem Balken beträgt also $h(r) \cdot \mathrm{d}r \cdot f(r)$. Aufsummieren dieser Balken im ersten Quadranten ergibt schliesslich $\int_0^3 (12000 - 2000r)\sqrt{9 - r^2}\,\mathrm{d}r$ und die Gesamtbevölkerung beträgt

$$4\int_0^3 (12000 - 2000r)\sqrt{9 - r^2}\,\mathrm{d}r.$$

22. Eine Spirale ist gegeben durch die Parametrisierung

$$\gamma\colon [0, 4\pi] \to \mathbb{R}, t \mapsto (\cos t, \sin t, t).$$

Die Länge der Kurve ist

i) ✗ $L(\gamma) = 4\pi$,

ii) ✓ $L(\gamma) = \sqrt{2} \cdot 4\pi$,

iii) ✗ $L(\gamma) = \sqrt{2} \cdot 2\pi$,

iv) ✗ $L(\gamma) = 8\pi$.

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Wir berechnen zuerst $\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$. Somit gilt $|\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$ und somit

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{4\pi} |\dot{\gamma}(t)| \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{4\pi} \sqrt{2} \, \mathrm{d}t = \sqrt{2} \cdot 4\pi. \end{aligned}$$