Das Quotientenkriterium von d'Alembert

Theorem

Sei $\{a_n\}$ *eine (positive) reelle Folge und* $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ *die dazu gehörende Reihe. Falls der Grenzwert*

$$q = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

existiert und $q < 1$ *so konvergiert die Reihe (absolut). Falls* $q > 1$ *so divergiert die Reihe und falls entweder* $q = 1$ *oder der Grenzwert nicht existiert, so ist das Kriterium inkonklusiv.*

Beweis

Wir beweisen den Fall $q < 1$. Es gilt dann

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \left| \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| - q \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon)$$

Dies impliziert, dass

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < q + \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon)$$

Insbesondere folgt daraus, dass

$$|a_{N(\varepsilon)+1}| < (q + \varepsilon) \cdot |a_{N(\varepsilon)}|$$

und analog gilt

$$|a_{N(\varepsilon)+2}| < (q + \varepsilon) \cdot |a_{N(\varepsilon)+1}| < (q + \varepsilon)^2 \cdot |a_{N(\varepsilon)}|$$

und

$$|a_{N(\varepsilon)+k}| < (q + \varepsilon)^k \cdot |a_{N(\varepsilon)}| \quad \forall k > 0$$

Wähle nun ε so klein, dass auch $q + \varepsilon < 1$. Betrachten wir nun die Reihe, so erhalten wir

$$|s_n| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| \quad \text{(Dreiecksungleichung)}$$

$$= \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)-1} |a_k| + \sum_{k=N(\varepsilon)}^{n} |a_k|$$

$$\leq S + |a_{N(\varepsilon)}| \sum_{k=0}^{n-N(\varepsilon)} (q+\varepsilon)^k$$

$$< S + \frac{|a_{N(\varepsilon)}|}{1-(q+\varepsilon)} < \infty$$

Damit haben wir gezeigt, dass s_n eine monoton wachsende und beschränkte Folge ist und somit ist sie konvergent (nach dem Satz über monotone Folgen). ■