POTENZREIHEN ELEMENTARER FUNKTIONEN

Mit Hilfe des Taylorpolynoms können wir glatte Funktionen $f\colon U \to \mathbb{R}$ in einer Umgebung eines Puntes x_0 approximieren. Für $x_0 = 0$ ist dieses gegeben durch

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Wir bezeichnen die Differenz zwischen f und T_n als Restglied

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x).$$

Dieses ist gegeben durch

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\hat{x})}{(n+1)!} x^{n+1},$$

für ein $\hat{x}$ zwischen 0 und x.

Beispiel 1. Für $f(x) = e^x$ gilt $f^{(k)}(x) = e^x$ und folglich

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!},$$

mit

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\hat{x}},$$

für ein $\hat{x} \in [-x, x]$.

Wir wollen nun zeigen, dass $T_n(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ gegen e^x konvergiert und daher die Exponentialfunktion auf ganz $\mathbb{R}$ durch die Potenzreihe

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

gegeben ist.

Für ein festes $x \in \mathbb{R}$ sei $m = \lceil |x| \rceil \in \mathbb{N}$. Für $n > m$ gilt dann

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &= \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\hat{x}} \leq \frac{m^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^m \\
&= \frac{m^m \cdot m^{n+1-m}}{m! \cdot (m+1) \cdot \ldots \cdot (n+1)} \cdot e^m \\
&\leq \frac{m^m \cdot e^m}{m!} \cdot \frac{m^{n+1-m}}{(m+1)^{n+1-m}} = C \cdot \left(\frac{m}{m+1}\right)^{n+1-m},
\end{aligned}$$

für $C := \frac{m^m \cdot e^m}{m!} \in \mathbb{R}$. Da $p := \frac{m}{m+1} < 1$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} |f(x) - T_n(x)| \leq \lim_{n\to\infty} C \cdot p^{n+1-m} = 0.$$

Beispiel 2. Sei nun $f(x) = \sin(x)$. Dann gilt

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin(x), & n = 4k, \\ \cos(x), & n = 4k+1, \\ -\sin(x), & n = 4k+2, \\ -\cos(x), & n = 4k+3. \end{cases}$$

und folglich

$$T_{2n+2} = T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Da $|\sin(x)|, |\cos(x)| \leq 1$ haben wir zudem

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^n}{(n+1)!} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

wie zuvor. Also gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Auf dieselbe Weise können wir

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$

zeigen.