Lösung: Serie 1 - Logik und Notation

1. Zwei ansonsten unabhängige reelle Grössen x und y sind miteinander verknüpft durch die Einschränkung

$$x^2 - 8x \leq -6y - y^2. \tag{1}$$

a) Man zeichne eine Figur, aus der alle möglichen Werte für x und y ersichtlich werden.

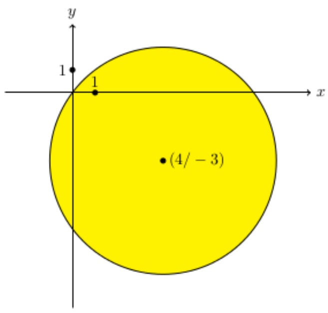
b) Welchen Wert kann die Grösse x unter der Bedingung (1) höchstens annehmen, und wie müsste y gewählt werden, damit dieser Maximalwert von x tatsächlich angenommen wird?

Lösung

a) Durch quadratisches Ergänzen erhalten wir, dass die angeschriebene Ungleichung äquivalent ist zu

$$(x-4)^2 + (y+3)^2 \leq 25.$$

Die Menge der zulässigen Zustände (x, y) ist daher eine Kreisscheibe mit Radius 5 und Zentrum $(4, -3)$.



b) In der Skizze sehen wir, dass x den grössten Wert im Schnittpunkt der Kreislinie mit der horizontalen Geraden durch den Kreismittelpunkt annimmt. Der grösstmögliche Wert für x ist also $4 + 5 = 9$ und ist nur realisierbar, wenn $y = -3$ gewählt wird.

Rechnerisch können wir dies folgendermassen begründen. Da das Quadrat einer reellen Zahl nie negativ ist, gilt

$$(x-4)^2 \leq 25 - (y+3)^2 \leq 25. \tag{2}$$

Daher gilt $-5 \leq x - 4 \leq 5$ oder mit anderen Worten $x \in [-1, 9]$ und x kann höchstens den Wert 9 annehmen. In diesem Fall haben wir in der Ungleichung (1) Gleichheit, was nur gilt, falls $y + 3 = 0$, bzw. $y = -3$.

2. Bringen Sie folgende Aussagen in die "Formelsprache", d.h. stellen Sie diese mit Hilfe von Quantoren dar. In der Lösung soll kein einziges Wort stehen! Dabei sind A und B beliebige Mengen.
Beispiel: Die Menge A ist in B enthalten genau dann wenn jedes Element aus A auch in B liegt.
Lösungsvorschläge: $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A\colon x \in B$ oder $A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$.

a) Eine reelle Zahl kann nie gleichzeitig grösser und kleiner als 1 sein.

b) Es gibt eine kleinste natürliche Zahl.

c) Es gibt keine grösste reelle Zahl.

d) Das Produkt zweier reeller Zahlen ist immer reell.

e) Der Quotient zweier ganzer Zahlen ist nicht immer ganz.

f) Ein Element aus A oder B liegt genau dann im Durchschnitt von A und B, wenn es in beiden Mengen enthalten ist.

Lösung

a) $\forall x \in \mathbb{R}\colon \neg(x > 1 \wedge x < 1)$

b) $\exists x \in \mathbb{N}\, \forall y \in \mathbb{N}\colon x \leq y$

c) $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R}\colon y > x$

d) Variante 1: $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon xy \in \mathbb{R}$
Variante 2: $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow xy \in \mathbb{R}$

e) $\exists x, y \in \mathbb{Z}\colon \frac{x}{y} \notin \mathbb{Z}$

f) $\forall x \in A \cup B\colon (x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$

3. Es sei A das Innere des Oktaeders mit den Ecken $(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0)$ und $(0, 0, \pm 1)$. Man stelle A auf möglichst einfache Weise in der Form

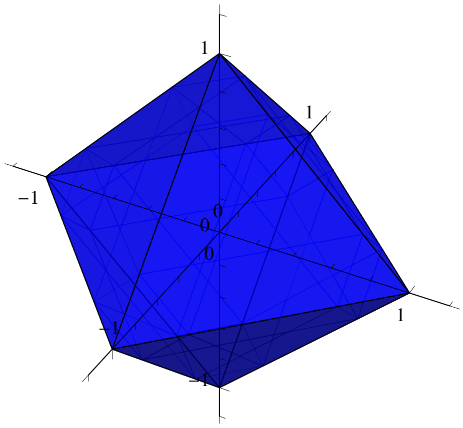
$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \ldots\}$$

dar.

Lösung Die im ersten Oktanten liegende Seitenfläche von A gehört der Ebene $x+y+z=1$ an. Da A bezüglich aller drei Koordinatenebenen spiegelsymmetrisch ist, folgt

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \big| |x| + |y| + |z| < 1\}.$$

Das $<$ (im Gegensatz zu $\leq$) erklärt sich dadurch, dass nach dem Inneren gefragt war.


1
1
−1
0
0
0
1
−1
−1