Lösung: Serie 2 - Komplexe Zahlen I

1. *(Induktion)*

a) Zeigen Sie die **Ungleichung von Bernoulli**: Für alle $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

b) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$3 | n^3 - n,$$

wobei $a|b$ bedeutet, dass b durch a teilbar ist, also dass $\frac{b}{a} \in \mathbb{Z}$.

Lösung

a) Für $n = 0$ und $n = 1$ gilt offensichtlich Gleichheit.

Sei nun $n \geq 1$. Wir zeigen den Induktionsschritt $n \to n+1$. Unsere Induktionsannahme lautet somit

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Multipliziere beide Seiten mit $1 + x$. Beachte, dass $1 + x > 0$. Dann gilt wegen der Induktionsannahme und wegen $nx^2 \geq 0$, dass

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1 + nx + x + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x.$$

b) Für $n = 0$ und $n = 1$ ist die Aussage offensichtlich, da $\frac{0}{3} = 0 \in \mathbb{Z}$.

Sei $n \geq 1$. Wir zeigen nun den Induktionsschritt $n \to n+1$. Unsere Induktionsannahme lautet

$$3 | n^3 - n.$$

Berechne

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = n^3 - n + 3(n^2 + n).$$

Wegen

$$3 | n^3 - n \text{ (Induktionsannahme)}$$

und

$$3 | 3(n^2 + n) \text{ (da } \tfrac{3(n^2+n)}{3} = n^2 + n \in \mathbb{Z})$$

folgt die Aussage.

2. Skizzieren Sie die folgenden Bereiche der komplexen Ebene!

a) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 3, \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$

b) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \frac{|z+2-2\mathbf{i}|}{|z+\mathbf{i}|} = 2\}$

c) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) \geq \mathrm{Re}(z)\}$

d) $\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z-3| \geq 1 \wedge |z-1-\mathbf{i}| < 4\}$

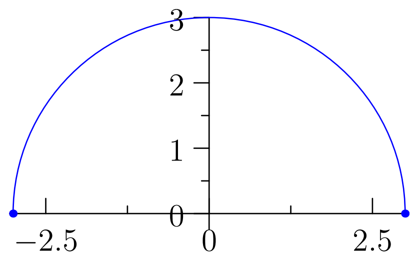
e) $\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z-\mathbf{i}+3| \geq |z+2\mathbf{i}| \wedge \mathrm{Re}(z) > 0 \wedge \mathrm{Im}(z) > 0\}$

Lösung

a) Die Elemente mit Betrag 3 liegen auf einem Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius 3.

Die Elemente mit $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ liegen auf der oberen Halbebene.

Beachte, dass die Randpunkte -3 und 3 Teil der Menge sind.



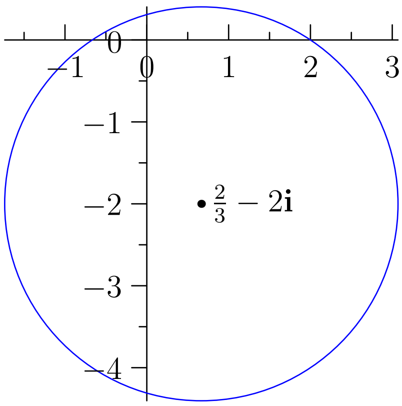
b) Gesucht sind alle komplexen Zahlen, die von $-2+2\mathbf{i}$ genau doppelt so weit weg sind wie von $-\mathbf{i}$.

Wir schreiben $z = x + \mathbf{i}y$ und rechnen

$$
\begin{aligned}
& \frac{|x+\mathbf{i}y+2-2\mathbf{i}|}{|x+\mathbf{i}y+\mathbf{i}|} = 2 \\
\Leftrightarrow\quad & |x+\mathbf{i}y+2-2\mathbf{i}|^2 = 4|x+\mathbf{i}y+\mathbf{i}|^2 \\
\Leftrightarrow\quad & (x+2)^2 + (y-2)^2 = 4x^2 + 4(y+1)^2 \\
\Leftrightarrow\quad & 3x^2 - 4x + 3y^2 + 12y - 4 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & x^2 - \frac{4}{3}x + y^2 + 4y - \frac{4}{3} = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} + (y+2)^2 - 4 - \frac{4}{3} = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + (y+2)^2 = \frac{52}{9}.
\end{aligned}
$$

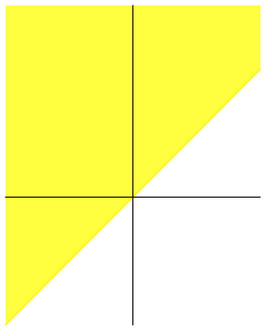
Im zweitletzten Schritt haben wir dabei quadratisch ergänzt.

Das Ergebnis ist ein Kreis mit Mittelpunkt $\frac{2}{3} - 2\mathbf{i}$ und Radius $\frac{2\sqrt{13}}{3}$. Er wird **Kreis des Apollonius** genannt.



c) Die Gleichung $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(z)$ beschreibt die Punkte auf der ersten Winkelhalbierenden.

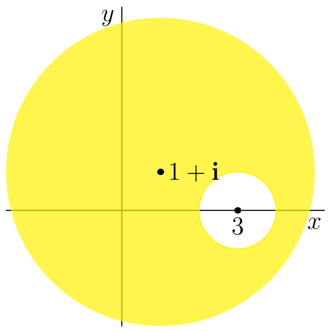
Die gesuchte Menge ist die Vereinigung dieser Geraden und des Bereiches oberhalb davon.



d) Die Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z - 3| \geq 1\}$ besteht aus allen Zahlen ausserhalb der Kreisscheibe mit Mittelpunkt 3 und Radius 1.

Die Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1 - \mathbf{i}| < 4\}$ ist die offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt $1 + \mathbf{i}$ und Radius 4.

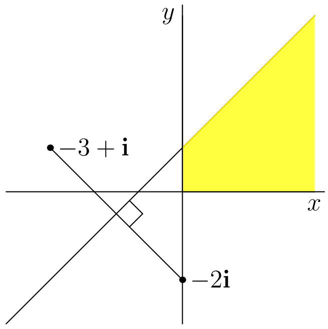
Gesucht ist die Schnittmenge. Beachte, dass der Rand des kleinen Kreises schon, jener des grossen jedoch nicht Teil der Menge ist.



e) Gesucht sind die Punkte im ersten Quadranten, die näher bei $-2\mathbf{i}$ sind als bei $-3 + \mathbf{i}$.

Die komplexen Zahlen, die von $-2\mathbf{i}$ gleich weit entfernt sind wie von $-3+\mathbf{i}$, sind genau jene auf der Mittelsenkrechten der Strecke von $-2\mathbf{i}$ nach $-3+\mathbf{i}$. Diese Mittelsenkrechte teilt die komplexe Ebene in zwei Halbebenen. Die komplexen Zahlen, die zu $-2\mathbf{i}$ näher sind als zu $-3+\mathbf{i}$, ist die Halbebene, die $-2\mathbf{i}$ enthält.

Dabei sind die Koordinatenachsen zur gesuchten Menge disjunkt. Der Teil der Mittelsenkrechten der Strecke von $-2\mathbf{i}$ nach $-3+\mathbf{i}$, der im ersten Quadranten liegt, ist jedoch Teil der gesuchten Menge.



3. Lösen Sie folgende Gleichungen in $z \in \mathbb{C}$ und stellen Sie die Lösung(en) in Normalform dar.

a) $z^2 = \mathbf{i}$

b) $\frac{z+3-2\mathbf{i}}{z-5-\mathbf{i}} = 3\mathbf{i}$

c) $z^2 + (13+\mathbf{i})z + 44 + 8\mathbf{i} = 0$

d) $z = \bar{z}$

Lösung

a) Gesucht ist $z = x + \mathbf{i}y$ mit $z^2 = (x+\mathbf{i}y)^2 = x^2 - y^2 + \mathbf{i}2xy = \mathbf{i}$.

Durch Vergleich von Real- und Imaginärteil erhalten wir die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für $x, y \in \mathbb{R}$:

$$2xy = 1 \quad \Leftrightarrow \quad xy = \frac{1}{2}, \tag{1}$$
$$x^2 - y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = y^2. \tag{2}$$

Aus der ersten Gleichung folgt, dass $x \neq 0$ und damit $y = \frac{1}{2x}$. In die zweite Gleichung eingesetzt ergibt das

$$x^4 = \frac{1}{4}$$

und daher

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Es folgt aus der ersten Gleichung, dass

$$y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad y_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

und daher

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

b) Wir rechnen

$$\begin{aligned} & \frac{z+3-2\mathbf{i}}{z-5-\mathbf{i}} = 3\mathbf{i} \\ \Leftrightarrow \quad & z+3-2\mathbf{i} = 3\mathbf{i}(z-5-\mathbf{i}) = 3\mathbf{i}z - 15\mathbf{i} + 3 \\ \Leftrightarrow \quad & z(1-3\mathbf{i}) = -13\mathbf{i} \\ \Leftrightarrow \quad & z = \frac{-13\mathbf{i}}{1-3\mathbf{i}}. \end{aligned}$$

Weiter folgt

$$z = \frac{-13\mathbf{i}(1+3\mathbf{i})}{(1-3\mathbf{i})(1+3\mathbf{i})} = \frac{39-13\mathbf{i}}{10} = \frac{39}{10} - \mathbf{i}\frac{13}{10}.$$

c) Wir können die übliche quadratische Lösungsformel anwenden.

$$\begin{aligned} z &= \frac{-(13+\mathbf{i}) \pm \sqrt{(13+\mathbf{i})^2 - 4(44+8\mathbf{i})}}{2} \\ &= \frac{-(13+\mathbf{i}) \pm \sqrt{-8-6\mathbf{i}}}{2}. \end{aligned}$$

Wir müssen also die Quadratwurzel von $-8-6\mathbf{i}$ bestimmen. Der Ansatz $(a+b\mathbf{i})^2 = -8-6\mathbf{i}$ liefert uns $\sqrt{-8-6\mathbf{i}} = 1-3\mathbf{i}$

Bemerkung: Um eine eindeutige Wurzel von $c \in \mathbb{C}$ zu erhalten, wählen wir diejenige Lösung von $z^2 = c$ mit $\mathrm{Re}(z) > 0$ oder $\mathrm{Re} = 0$ und $\mathrm{Im} \geq 0$.

Im Detail haben wir $(a+b\mathbf{i})^2 = a^2 - b^2 + 2ab\mathbf{i}$. Durch Vergleich von Real- und Imaginärteil erhalten wir $a^2 - b^2 = -8$ und $2ab = -6$. Aus der zweiten Gleichung folgt $a \neq 0$ und $b = \frac{-3}{a}$. Durch einsetzen in der ersten Gleichung erhalten wir $a^4 + 8a^2 - 9 = 0$. Mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen folgt $a^2 = 1$ (nur positive Lösung möglich) und folglich $a = 1$ und $b = -3$.

Für unsere ursprüngliche Gleichung erhalten wir die zwei Lösungen

$$z_1 = \frac{-(13+\mathbf{i}) + (1-3\mathbf{i})}{2} = -6-2\mathbf{i}$$

und

$$z_2 = \frac{-(13+\mathbf{i}) - (1-3\mathbf{i})}{2} = -7+\mathbf{i}.$$

d) Stelle $z = x + iy$ in Normalform dar.

Es gilt
$$x + iy = x - iy$$
genau dann, wenn
$$x = x$$
und
$$y = -y.$$
Also ist $x \in \mathbb{R}$ beliebig und $y = 0$. Die Lösungsmenge ist daher gleich $\mathbb{R}$.

4. *(Dreiecksungleichung)* Für die komplexen Zahlen gilt die sogenannte **Dreiecksungleichung**
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$
Betrachten Sie nun den Beweis und erklären Sie bei jedem Schritt, wieso diese Umformung korrekt ist.

Beweis: Es gilt
$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &\overset{(1)}{=} (z_1 + z_2) \cdot (\overline{z_1 + z_2}) \\
&\overset{(2)}{=} z_1 \cdot \overline{z_1} + z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_2} \\
&\overset{(3)}{=} |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}) + |z_2|^2 \\
&\overset{(4)}{\leq} |z_1|^2 + 2|z_1 \cdot \overline{z_2}| + |z_2|^2 \\
&\overset{(5)}{=} |z_1|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| + |z_2|^2 \\
&\overset{(6)}{=} (|z_1| + |z_2|)^2
\end{aligned}$$
und durch Wurzelziehen erhalten wir $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. □

Lösung

(1) $z \cdot \overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$

(2) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$, ausmultiplizieren

(3) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$, $\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$ und $\overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = z_2 \cdot \overline{z_1}$, da $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$, $\overline{\overline{z}} = z$

(4) $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$

(5) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$, $|\overline{z}| = |z|$

(6) 1. Binomische Formel

5. Repetition. Fassen Sie folgende Ausdrücke zusammen. Geben Sie die Werte der Variablen an, für die der gegebene Term definiert ist.

a) $(\sqrt{x+y} - \sqrt{y-z})(\sqrt{x+y} + \sqrt{y-z})$

b) $\frac{3\sqrt{45}}{\sqrt{x^2-y^2}} - \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{(x+y)(x-y)}}$

c) $\frac{a^2-4b^2}{\sqrt[3]{a^9}-b\sqrt{16a^2b^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^3}}$

d) $\log_y(10) - \log_y(5)$

e) $2\log_a(4) + \log_b(4) - 3\log_a(2) + 2\log_b(5)$

f) $2\log_a(3x) + \log_a(3x) + 4\log_a(2x) - \frac{1}{2}\log_a(64x^2)$

Lösung

a) Mit Hilfe der 3. Binomischen Formel erhalten wir

$$\begin{aligned}(\sqrt{x+y} - \sqrt{y-z})(\sqrt{x+y} + \sqrt{y-z}) &= \sqrt{x+y}^2 - \sqrt{y-z}^2 \\ &= (x+y) - (y-z) \\ &= x+z.\end{aligned}$$

Die Wurzelausdrücke sind definiert falls $x+y \geq 0$ und $y \geq z$.

b) Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{3\sqrt{45}}{\sqrt{x^2-y^2}} - \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{(x+y)(x-y)}} &= \frac{3\sqrt{9}\sqrt{5}}{\sqrt{x^2-y^2}} - \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{x^2-y^2}} \\ &= \frac{9\sqrt{5}-4\sqrt{5}}{\sqrt{x^2-y^2}} \\ &= \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{x^2-y^2}}.\end{aligned}$$

Der Term ist wohldefiniert falls $x^2 > y^2$, bzw. $|x| > |y|$.

c) Wir bemerken zuerst, dass der Ausdruck nur für $a > 0$ definiert ist. (Division durch $\sqrt{a^3}$.)
Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{a^2-4b^2}{\sqrt[3]{a^9}-b\sqrt{16a^2b^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^3}} &= \frac{a^2-4b^2}{a^3-b(4a|b|)} \cdot \frac{1}{a\sqrt{a}} \\ &= \frac{a^2-4b^2}{a^2\sqrt{a}(a^2-4|b|b)}.\end{aligned}$$

Es muss also zudem $a^2 \neq 4|b|b$ gelten.

Für $b \geq 0$ lässt sich der Term weiter vereinfachen zu $\frac{1}{a^2\sqrt{a}}$.

d) Der Logarithmus ist für die Basis $y > 0, y \neq 1$ definiert.
Das Logarithmusgesetz für Quotienten liefert

$$\log_y(10) - \log_y(5) = \log_y(\tfrac{10}{5}) = \log_y(2).$$

e) Wie zuvor ist der Term für $a, b > 0$ und $a, b \neq 1$ definiert.
Es gilt

$$\begin{aligned} &2\log_a(4) + \log_b(4) - 3\log_a(2) + 2\log_b(5) \\ &\quad = \log_a(4^2) + \log_b(4) - \log_a(2^3) + \log_b(5^2) \\ &\quad = \log_a(\tfrac{4^2}{2^3}) + \log_b(4 \cdot 5^2) \\ &\quad = \log_a(2) + \log_b(100) \\ &\quad = \log_a(2) + 2\log_b(10). \end{aligned}$$

Wir verwenden hier das Logarithmusgesetz für Potenzen.

f) Der Ausdruck ist wohldefiniert für $a > 0, a \neq 1$ und $x > 0$.
Wir erhalten

$$\begin{aligned} &2\log_a(3x) + \log_a(3x) + 4\log_a(2x) - \tfrac{1}{2}\log_a(64x^2) \\ &\quad = \log_a(9x^2) + \log_a(3x) + \log_a(16x^4) - \log_a(8x) \\ &\quad = \log_a\left(\frac{9x^2 \cdot 3x \cdot 16x^4}{8x}\right) \\ &\quad = \log_a(54x^6). \end{aligned}$$