Serie 3 - Komplexe Zahlen II

1. Wir betrachten die komplexe Gleichung

$$z^6 = -4\sqrt{3} - 4\mathbf{i}.$$

a) Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ dieser Gleichung.

b) Zeichnen Sie die Lösungen in die komplexe Zahlenebene ein.

c) Welche der eingezeichneten Lösungen ist die Zahl $\sqrt[6]{-4\sqrt{3} - 4\mathbf{i}}$?

Lösung

a) Zuerst schreiben wir die Gleichung in Polarform um. Es gilt

$$\begin{aligned} |-4\sqrt{3} - 4\mathbf{i}| &= \sqrt{(-4\sqrt{3})^2 + (-4)^2} = \sqrt{64} = 8, \\ \arg(-4\sqrt{3} - 4\mathbf{i}) &= \arctan\left(\tfrac{4}{4\sqrt{3}}\right) - \pi = -\tfrac{5}{6}\pi. \end{aligned}$$

Somit lautet die Gleichung in Polarform

$$z^6 = 8\exp(-\mathbf{i}\tfrac{5}{6}\pi).$$

Wir setzen nun z ebenfalls in Polarform $z = r\exp(\mathbf{i}\varphi)$ an. Damit erhalten wir

$$r^6\exp(6\mathbf{i}\varphi) = 8\exp(-\mathbf{i}\tfrac{5}{6}\pi)$$

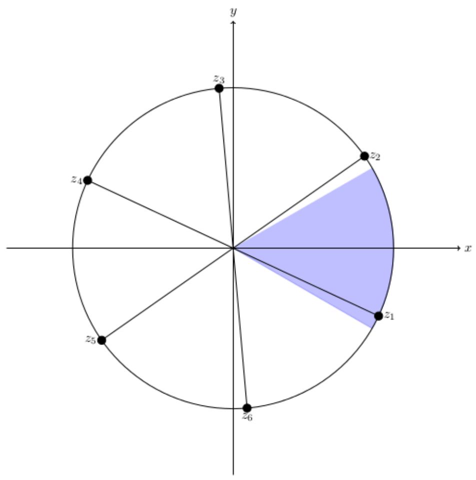
und durch Vergleich beider Seiten die Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned} r^6 &= 8 & &\Rightarrow & r &= \sqrt{2}, \\ 6\varphi &= -\tfrac{5}{6}\pi + k\cdot 2\pi & &\Rightarrow & \varphi &= -\tfrac{5}{36}\pi + k\cdot\tfrac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Insgesamt gibt es also sechs (verschiedene) Lösungen:

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{2}\exp(-\mathbf{i}\tfrac{5}{36}\pi) & &(k=0), \\ z_2 &= \sqrt{2}\exp(\mathbf{i}\tfrac{7}{36}\pi) & &(k=1), \\ z_3 &= \sqrt{2}\exp(\mathbf{i}\tfrac{19}{36}\pi) & &(k=2), \\ z_4 &= \sqrt{2}\exp(\mathbf{i}\tfrac{31}{36}\pi) & &(k=3), \\ z_5 &= \sqrt{2}\exp(\mathbf{i}\tfrac{43}{36}\pi) = \sqrt{2}\exp(-\mathbf{i}\tfrac{29}{36}\pi) & &(k=4), \\ z_6 &= \sqrt{2}\exp(\mathbf{i}\tfrac{55}{36}\pi) = \sqrt{2}\exp(-\mathbf{i}\tfrac{17}{36}\pi) & &(k=5). \end{aligned}$$

b) Die Abbildung zeigt die sechs Lösungen z_1 bis z_6. Sie liegen auf einem Kreis mit Radius $\sqrt{2}$ um den Punkt 0. Der Winkel zwischen den einzelnen Lösungen beträgt $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} = \frac{12\pi}{36}$.



c) Gemäss der Definition aus der Vorlesung muss das Argument der 6-ten Wurzel zwischen $-\frac{\pi}{6} = -\frac{6\pi}{36}$ und $\frac{\pi}{6} = \frac{6\pi}{36}$ liegen. Dieser Bereich ist auf der Skizze blau hervorgehoben. Dies trifft nur für die Lösung z_1 von oben zu. Es gilt also

$$\sqrt[6]{-4\sqrt{3} - 4\mathbf{i}} = \sqrt{2}\exp(-\mathbf{i}\tfrac{5}{36}\pi).$$

2. Es sei z_1 eine Lösung der folgenden Gleichung. Bestimmen Sie die reellen Koeffizienten p und q sowie die weiteren Lösungen!

$$3z^3 - 12z^2 + pz + q = 0, \qquad z_1 = 3 + \mathbf{i}.$$

Lösung

Da sämtliche Koeffizienten reell sind, muss nach einem Satz aus der Vorlesung neben z_1 auch $z_2 = \overline{z_1}$ eine Nullstelle des Polynoms sein. Damit folgt, dass $(z - z_1)(z - z_2)$ ein Faktor des Polynoms ist. Nach dem Hauptsatz der Algebra gibt es auch noch eine weitere Nullstelle z_3. Das ergibt:

$$\begin{array}{rrcl} & 3z^3 - 12z^2 + pz + q &=& 3(z-(3+\mathbf{i}))(z-(3-\mathbf{i}))(z-z_3) \\ \Leftrightarrow & 3z^3 - 12z^2 + pz + q &=& 3(z^2 - 6z + 10)(z - z_3) \\ \Leftrightarrow & 3z^3 - 12z^2 + pz + q &=& 3z^3 - (18 + 3z_3)z^2 + (30 + 18z_3)z - 30z_3 \end{array}$$

Damit die linke und die rechte Seite in obiger Gleichung für *alle* $z \in \mathbb{C}$ gleich sind, müssen die Koeffizienten übereinstimmen. Damit erhalten wir zur Bestimmung der drei Unbekannten p, q, z_3 die Gleichungen:

$$\begin{array}{rcll} 12 &=& 18 + 3z_3 & \Rightarrow \underline{z_3 = -2} \\ p &=& 30 + 18z_3 & \Rightarrow \underline{p = -6} \\ q &=& -30z_3 & \Rightarrow \underline{q = 60} \end{array}$$

3. Prüfungsaufgabe 1, Sommer 2014. Es sei das Gebiet

$$B = \left\{ z \in C \setminus \{0\} \,\middle|\, \operatorname{Im}\left(\frac{z+2}{iz}\right) > 0 \right\}$$

gegeben.

a) Skizzieren Sie das Gebiet B in der komplexen Ebene.

b) Das Polynom $z^3 + \frac{7}{2}z^2 + 7z + 6$ hat eine komplexe Nullstelle mit Realteil gleich -1. Bestimmen Sie alle Nullstellen dieses Polynoms in Normal- und in Polarform.

c) Welche dieser Nullstellen befinden sich in B?

Lösung

a) Für $z = x + iy$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{z+2}{iz} &= \frac{x+iy+2}{i(x+iy)} = \frac{x+iy+2}{ix-y} = \frac{(-ix-y)(x+iy+2)}{(-ix-y)(ix-y)} \\ &= \frac{-ix^2+xy-2ix-xy-iy^2-2y}{x^2+y^2} \\ &= \frac{-2y}{x^2+y^2} + \frac{-2x-x^2-y^2}{x^2+y^2} i. \end{aligned}$$

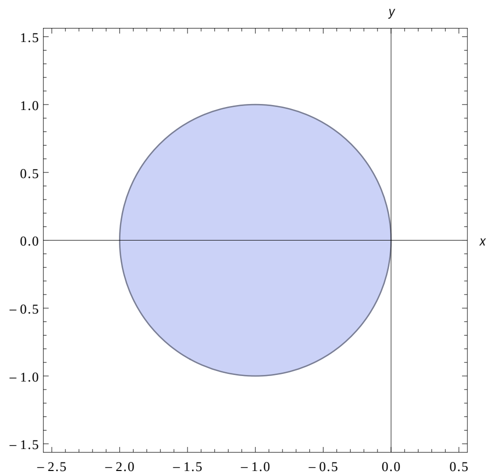
Das Gebiet B ist damit gegeben durch

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z+2}{iz}\right) = \frac{-2x-x^2-y^2}{x^2+y^2} > 0.$$

Umgeformt ergibt das

$$\begin{aligned} & \operatorname{Im}\left(\frac{z+2}{iz}\right) = \frac{-2x-x^2-y^2}{x^2+y^2} > 0 \\ \Leftrightarrow\quad & -2x - x^2 - y^2 > 0 \\ \Leftrightarrow\quad & 0 > x^2 + 2x + y^2 \\ \Leftrightarrow\quad & 0 > (x+1)^2 - 1 + y^2 \\ \Leftrightarrow\quad & 1 > (x+1)^2 + y^2. \end{aligned}$$

Das Gebiet B ist also das Innere des Kreises mit Mittelpunkt $(-1, 0)$ und Radius 1. Der Rand gehört nicht zur Menge.



b) Wir bemerken zuerst, dass -1 keine Nullstelle des Polynoms ist und folglich die Nullstelle mit Realteil -1 nicht reell ist. Da solche Nullstellen für Polynome mit reellen Koeffizienten immer in komplex konjugierten Paaren auftreten, hat das Polynom zwei Nullstellen von der Form

$$z_{1,2} = -1 \pm iy.$$

Somit müssen wir vom Polynom einen Faktor der Form

$$(z+1+iy)(z+1-iy) = z^2 + 2z + 1 + y^2$$

abspalten können. Polynomdivision ergibt

$$\begin{array}{llllll}
(z^3 & +\frac{7}{2}z^2 & +7z & +6 &) : & (z^2+2z+1+y^2) = z + \frac{3}{2} \\
-(z^3 & +2z^2 & +(1+y^2)z & &) & \\
\hline
 & \frac{3}{2}z^2 & +(6-y^2)z & +6 & & \\
-(& \frac{3}{2}z^2 & +3z & +\frac{3}{2}(1+y^2) &) & \\
\hline
 & & (3-y^2)z & +(\frac{9}{2} - \frac{3}{2}y^2) & &
\end{array}$$

Es bleibt also der Rest

$$(3-y^2)z + \frac{9}{2} - \frac{3y^2}{2}$$

übrig und dieser muss gleich 0 sein. Es ergibt sich also $y = \pm\sqrt{3}$ und die drei Nullstellen lauten in Normalform

$$z_1 = -1 + \sqrt{3}i, \quad z_2 = -1 - \sqrt{3}i, \quad z_3 = -\frac{3}{2}.$$

In Polarform lauten diese somit

$$z_1 = 2e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad z_2 = 2e^{\frac{-2\pi i}{3}}, \quad z_3 = \frac{3}{2}e^{\pi i}.$$

c) In Teilaufgabe a) haben wir gesehen, dass alle Punkte $z = x + iy$ in B die Ungleichung

$$1 > (x+1)^2 + y^2$$

erfüllen müssen. Es folgt $z_1 \notin B$, $z_2 \notin B$, $z_3 \in B$.

4. Rechnen Sie nach, dass die folgende Beziehung gilt:

$$\sin(5\varphi) = 5\cos^4(\varphi)\sin(\varphi) - 10\cos^2(\varphi)\sin^3(\varphi) + \sin^5(\varphi).$$

Lösung

Wir verwenden hierfür, dass der Sinus eines Winkels α als Imaginärteil der komplexen Zahl mit Argument α aufgefasst werden kann. Wir können dann die Formel von de Moivre anwenden.

$$\sin(5\varphi) = \mathrm{Im}\big(\exp(\mathbf{i}\cdot 5\varphi)\big) = \mathrm{Im}\big((\exp(\mathbf{i}\varphi))^5\big)$$

Ziel muss also sein, $(\exp(\mathbf{i}\varphi))^5$ in der Form $x + \mathbf{i}y$ zu schreiben, um möglichst einfach den Imaginärteil ablesen zu können:

$$\begin{aligned}
(\exp(\mathbf{i}\varphi))^5 &= (\cos(\varphi) + \mathbf{i}\sin(\varphi))^5 \\
&= \cos^5(\varphi) + 5\mathbf{i}\cos^4(\varphi)\sin(\varphi) + 10\mathbf{i}^2\cos^3(\varphi)\sin^2(\varphi) \\
&\quad + 10\mathbf{i}^3\cos^2(\varphi)\sin^3(\varphi) + 5\mathbf{i}^4\cos(\varphi)\sin^4(\varphi) + \mathbf{i}^5\sin^5(\varphi) \\
&= \cos^5(\varphi) + 5\mathbf{i}\cos^4(\varphi)\sin(\varphi) - 10\cos^3(\varphi)\sin^2(\varphi) \\
&\quad - 10\mathbf{i}\cos^2(\varphi)\sin^3(\varphi) + 5\cos(\varphi)\sin^4(\varphi) + \mathbf{i}\sin^5(\varphi) \\
&= \cos^5(\varphi) - 10\cos^3(\varphi)\sin^2(\varphi) + 5\cos(\varphi)\sin^4(\varphi) \\
&\quad + \mathbf{i}\big(\underbrace{5\cos^4(\varphi)\sin(\varphi) - 10\cos^2(\varphi)\sin^3(\varphi) + \sin^5(\varphi)}_{=\mathrm{Im}\left((\exp(\mathbf{i}\varphi))^5\right)=\sin(5\varphi)}\big)
\end{aligned}$$

Im zweiten Schritt kann man für die Koeffizienten zum Beispiel das Pascalsche Dreieck verwenden.

Bemerkung: Verblüffend an dieser Aufgabe ist, dass wir eine Gleichung, in welcher nur reelle Zahlen auftreten (der Winkel φ ist reell), beweisen können, indem wir komplexe Zahlen benutzen. Derartiges wird uns auch später bei Ingenieursproblemen wie der Lösung von Differentialgleichungen begegnen.