Serie 4 - Folgen und Reihen

1. Untersuchen Sie die nachstehenden Zahlenfolgen. Sind sie beschränkt? Sind sie monoton? Konvergieren sie, und falls ja, wie lautet ihr Grenzwert?

a) $a_n = \cos \frac{\pi n}{3}$
b) $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} + \frac{n}{n^2}$
c) $a_n = \frac{3n^4-5n^2+2}{7n^4-4n^3}$
d) $a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$ für $n \geq 3$
e) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
f) $a_n = \sqrt{(n+1)n} - n$

Lösung

a) Offensichtlich ist $\{a_n\}$ nach unten durch -1 und nach oben durch 1 beschränkt. Die ersten zwei Folgenglieder sind

$$a_1 = \tfrac{1}{2}$$

und

$$a_2 = -\tfrac{1}{2}.$$

Da cos bekanntlich 2π-periodisch ist, gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+6} = a_n.$$

Deshalb kann die Folge nur monoton sein oder konvergieren, wenn sie konstant ist. Das ist sie aber nicht. Also ist sie nicht monoton und konvergiert auch nicht.

b) Es gilt

$$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} + \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n^2}(1 + \cdots + n) = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Die Folge $\left\{\frac{1}{2n}\right\}$ ist beschränkt (durch $\frac{1}{2}$ von oben und 0 von unten), monoton fallend und konvergiert gegen 0. Daher ist $\{a_n\}$ ebenfalls beschränkt, monoton fallend und konvergiert gegen $\frac{1}{2}$.

c) Wir rechnen wie üblich

$$a_n = \frac{3n^4 - 5n^2 + 2}{7n^4 - 4n^3} \cdot \frac{n^{-4}}{n^{-4}} = \frac{3 - 5n^{-2} + 2n^{-4}}{7 - 4n^{-1}}$$

und da der Zähler gegen 3 und der Nenner gegen 7 konvergiert, konvergiert $\{a_n\}$ gegen $\frac{3}{7}$. Insbesondere ist die Folge beschränkt. Monoton ist sie wegen

$$a_1 = 0 < \frac{3}{7} < \frac{200}{459} = a_3$$

jedoch nicht. Wir haben $a_1 < a_3$ und wäre sie monoton steigend, so würde auch $a_3 \leq \lim_{n\to\infty} a_n$ gelten.

d) Wir rechnen

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n) - a_{n+1} = -\frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 (a_n - a_{n-1}) = \cdots = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (a_2 - a_1) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n . \end{aligned}$$

Daher gilt

$$a_n = a_1 + \sum_{k=0}^{n-2} (a_{k+2} - a_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-2} \left(-\frac{1}{2}\right)^k .$$

Das ist die Partialsummenfolge einer geometrischen Reihe mit Faktor $q = -\frac{1}{2}$ und konvergiert bekanntlich. Daher ist $\{a_n\}$ beschränkt. Offensichtlich ist sie nicht monoton, denn $a_3 = \frac{1}{2}$ und somit $a_1 < a_2 > a_3$. Der Grenzwert ist nach der Summenformel für die geometrische Reihe $\frac{1}{1-(-1/2)} = \frac{2}{3}$.

e) Wir rechnen

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} . \end{aligned}$$

Die Folge ist offensichtlich monoton fallend, konvergiert gegen 0 und ist daher auch beschränkt.

f) Wegen

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{(n+1)n} - n = \left(\sqrt{(n+1)n} - n\right) \frac{\sqrt{(n+1)n} + n}{\sqrt{(n+1)n} + n} \\ &= \frac{(n+1)n - n^2}{\sqrt{(n+1)n} + n} = \frac{n}{\sqrt{(n+1)n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \end{aligned}$$

ist die Folge monoton wachsend und konvergiert gegen $\frac{1}{2}$, daher ist sie auch beschränkt.

2. a) Sei $a_n = a_1 + (n-1)d$ mit $a_1 \in \mathbb{R}$ eine arithmetische Folge reeller Zahlen. Finden Sie eine explizite Formel für die n-te Partialsumme $\sum_{i=1}^n a_i$ einer arithmetischen Reihe.

b) Sei $a_n = a_1 q^{n-1}$ mit $a_1 \in \mathbb{R}$ eine geometrische Folge reeller Zahlen mit $|q| < 1$. Zeigen Sie: $\{a_n\}$ konvergiert gegen 0.

Lösung

a) Wir rechnen

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i &= \sum_{i=1}^{n} (a_1 + (i-1)d) = \sum_{i=1}^{n} a_1 + d\sum_{i=1}^{n}(i-1) \\ &= na_1 + d\sum_{i=0}^{n-1} i = na_1 + d\frac{(n-1)n}{2} \\ &= n\frac{2a_1 + d(n-1)}{2} = \frac{n(a_1+a_n)}{2}.\end{aligned}$$

b) Sei $\varepsilon > 0$. Wir wollen zeigen:

$$\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\, \forall n > N(\varepsilon) \colon |a_n| \leq \varepsilon.$$

Sei $N(\varepsilon)$ eine natürliche Zahl mit

$$N(\varepsilon) \geq \log_{|q|}(\varepsilon|q|/|a_1|).$$

Wegen $|q| < 1$ und $n > N(\varepsilon)$ gilt

$$|q|^n < |q|^{N(\varepsilon)}.$$

Daher gilt für alle natürlichen Zahlen $n > N(\varepsilon)$, dass

$$|a_n| = |a_1||q^{n-1}| = \frac{|a_1||q|^n}{|q|} < \frac{|a_1||q|^{\log_{|q|}(\varepsilon|q|/|a_1|)}}{|q|} = \frac{|a_1|}{|q|}\frac{\varepsilon|q|}{|a_1|} = \varepsilon$$

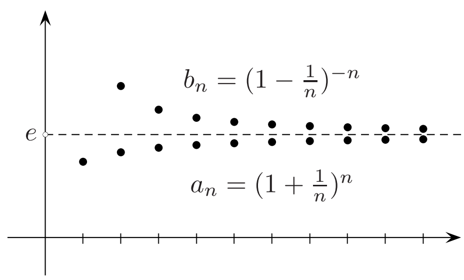
und wir sind fertig.

3. *(Die Eulersche Zahl)* Wir definieren zwei Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ durch

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

und

$$b_n := \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$



Ziel dieser Aufgabe ist zu zeigen, dass diese beiden Folgen gegen denselben Grenzwert konvergieren. Dieser wird in der Vorlesung e, die *Eulersche Zahl*, genannt werden.

a) Zeigen Sie

$$b_{n+1} = a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

b) Zeigen Sie mit der Ungleichung von Bernoulli (siehe Serie 2, Aufgabe 1), dass

$$\frac{a_n}{b_n} \geq 1 - \frac{1}{n}$$

und folgern Sie, dass die Folge $\{a_n\}$ monoton wächst.

c) Zeigen Sie auf ähnliche Weise, dass $\{b_n\}$ monoton fällt.

d) Folgern Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Lösung

a) Bemerke zuerst, dass wir die Folgen alternativ auch folgendermassen darstellen können

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

und

$$b_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n.$$

Wir rechnen

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \\ &= a_n \left(\frac{n+1}{n}\right) = a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

b) Zu beweisen ist, dass

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 - \frac{1}{n}.$$

Es gilt

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]^n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

Auf die rechte Seite wenden wir Bernoulli an:

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - n\frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Daher gilt mit a)

$$\begin{aligned} a_n &\geq \left(1 - \frac{1}{n}\right) b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) a_{n-1} \\ &= \frac{n-1}{n} \frac{n}{n-1} a_{n-1} = a_{n-1}. \end{aligned}$$

c) Zuerst wollen wir folgende Ungleichung zeigen:

$$\frac{b_n}{a_n} > 1 + \frac{1}{n}.$$

Wieder wenden wir Bernoulli an:

$$\begin{aligned}
\frac{b_n}{a_n} &= \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \\
&= \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq 1 + n\frac{1}{n^2-1} > 1 + n\frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Die Monotonie erhalten wir dann wieder mit a) durch

$$b_n > \left(1 + \frac{1}{n}\right) a_n = b_{n+1}.$$

d) Die Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ sind beide monoton. Weiter gilt wegen a) für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n < b_{n+1} < b_1$$

und

$$b_n > a_{n-1} > a_1,$$

daher sind die Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ nach oben beziehungsweise unten beschränkt. Somit konvergieren sie. Um den Grenzwert zu berechnen, beobachten wir, dass

$$\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$

und daher gilt wegen a)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} b_{n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} a_n \cdot 1 \\
&= \lim_{n\to\infty} a_n.
\end{aligned}$$

4. Untersuchen Sie die Konvergenz folgender Reihen:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3k+5}}{3^k}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+2^k}{k+3^k}$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-\sqrt{k}}{(k+\sqrt{k})^2}$

e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k^{-1}+7)\ \cos(k\pi)}{\sqrt{k}+\pi}$

Lösung

a) Hier können wir das Quotientenkriterium verwenden.

$$\begin{aligned}\frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{\sqrt{3(k+1)+5}}{3^{k+1}} \cdot \frac{3^k}{\sqrt{3k+5}} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{3k+8}{3k+5}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{3+\frac{8}{k}}{3+\frac{5}{k}}} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3} < 1\end{aligned}$$

Es folgt also, dass die Reihe konvergiert.

b) Wir schätzen die Folgenglieder ab.

$$\begin{aligned}|a_k| &= \left|\frac{1+2^k}{k+3^k}\right| \leq \frac{2^k+2^k}{3^k} = \frac{2\cdot 2^k}{3^k} \\ &= 2\left(\frac{2}{3}\right)^k.\end{aligned}$$

Wir haben also die geometrische Reihe mit $a = 2$ und $q = \frac{2}{3} < 1$ als konvergente Majorante gefunden. Daraus folgt, dass die gegebene Reihe konvergiert.

c) Die Reihe konvergiert. Nachweis mittels Quotientenkriterium:

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= \frac{\frac{(k+1)!}{(k+1)^{(k+1)}}}{\frac{k!}{k^k}} = \frac{(k+1)k!k^k}{(k+1)(k+1)^k k!} \\ &= \frac{k^k}{(k+1)^k} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^k \\ &= \underbrace{\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{(k+1)}}_{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow} e^{-1}} \cdot \underbrace{\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{-1}}_{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} e^{-1} < 1.\end{aligned}$$

Beachte, dass der erste Faktor der letzten Zeile mit $(b_{k+1})^{-1}$ aus Aufgabe 3 übereinstimmt.

d) Sei $a_k := \frac{k-\sqrt{k}}{(k+\sqrt{k})^2}$. Nun ist

$$a_k = \frac{k\big(1-1/\sqrt{k}\big)}{k^2\big(1+2/\sqrt{k}+1/k\big)} = \frac{1}{k} \cdot \underbrace{\frac{1-1/\sqrt{k}}{1+2/\sqrt{k}+1/k}}_{=:b_k};$$

der zweite Faktor b_k strebt gegen 1, es gibt also ein K mit $b_k \geq \frac{1}{2}$, $\forall k \geq K$. Somit

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \geq \sum_{k=1}^{K} a_k + \frac{1}{2} \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Wir haben also eine divergente Minorante erhalten. Daraus folgt, dass die gegebene Reihe divergiert.

e) Sei $\frac{\ln(k^{-1}+7)\cos(k\pi)}{\sqrt{k}+\pi} = (-1)^k \frac{\ln(k^{-1}+7)}{\sqrt{k}+\pi} =: (-1)^k a_k$.
Weil $x \mapsto \ln(x)$ monoton wachsend ist, ist die Funktion $x \mapsto \ln(\frac{1}{x}+7)$ monoton fallend. Ausserdem ist der Nenner die monoton wachsende Funktion $x \mapsto \sqrt{x}+\pi$. Wir können also folgern, dass $x \mapsto \frac{\ln(x^{-1}+7)}{\sqrt{x}+\pi}$ monoton fallend ist. Deswegen ist die Folge $\{a_k\}_k$ monoton fallend.
Weil

$$0 \leq a_k = \frac{\ln(k^{-1}+7)}{\sqrt{k}+\pi} \leq \frac{\ln 8}{\sqrt{k}+\pi} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

konvergiert die Folge $\{a_k\}_k$ gegen 0. Also handelt es sich um eine monoton fallende Nullfolge und die dazugehörende alternierende Reihe konvergiert.