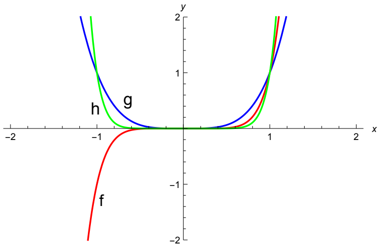
Analysis D-BAUG
Dr. Meike Akveld HS 2015

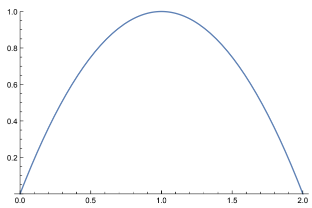
Serie 5 - Funktionen I

1. Repetition. Ordnen Sie die Funktionen x^4, x^7 und x^{10} den Graphen aus der nachfolgenden Abbildung zu. Verwenden Sie kein grafisches Hilfsmittel und begründen Sie Ihre Antwort.



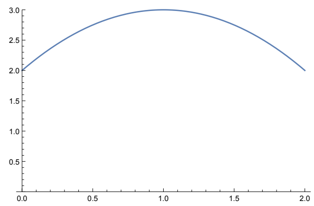
Lösung Im Allgemeinen gilt, dass x^n für gerade n eine gerade Funktion ist und für ungerade n eine ungerade Funktion. Wir sehen also direkt, dass es sich bei Funktion f um x^7 handeln muss. Für immer grösser werdende n wird x^n zunehmend flacher, das heisst bei der Funktion g handelt es sich um x^4 und bei der Funktion h handelt es sich um x^{10}.

2. Repetition. Die nachfolgende Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f mit dem Definitionsbereich $[0, 2]$ und dem Wertebereich $[0, 1]$. Bestimmen Sie die Definitionsbereiche und Wertebereiche der folgenden Funktionen und skizzieren Sie ihre Graphen.



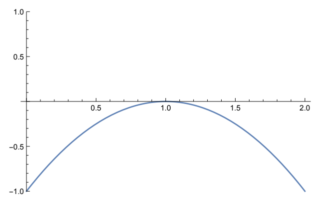
a) $f(x) + 2$
b) $f(x) - 1$
c) $2f(x)$
d) $-f(x)$
e) $f(x + 2)$
f) $f(x - 1)$
g) $f(-x)$
h) $-f(x + 1) + 1$

Lösung

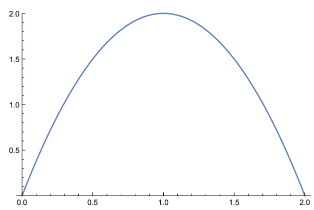


a) Hier wird der gesamte Graph um 2 in positive y-Richtung verschoben. Der Definitionsbereich bleibt $[0, 2]$, der Wertebereich wird um 2 nach oben verschoben, also $[2, 3]$.

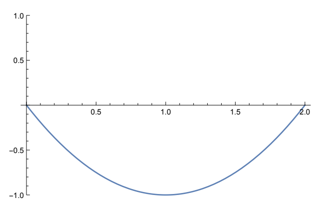
b) Hier wird der gesamte Graph um 1 in negative y-Richtung verschoben. Der Definitionsbereich bleibt $[0, 2]$, der Wertebereich wird um 1 nach unten verschoben, also $[-1, 0]$.



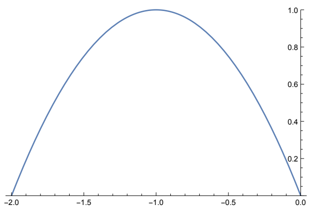
c) Hier wird der gesamte Graph um den Faktor 2 gestreckt. Der Definitionsbereich bleibt $[0, 2]$, der Wertebereich wird um 2 gestreckt, also $[0, 2]$.



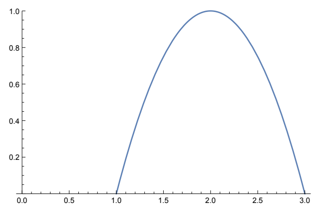
d) Hier wird der gesamte Graph an der x-Achse gespiegelt. Der Definitionsbereich bleibt $[0, 2]$, der Wertebereich ist dann $[-1, 0]$.



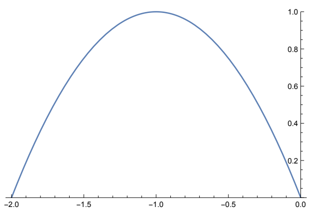
e) Hier wird der gesamte Graph um 2 in die negative x-Richtung verschoben. Der Definitionsbereich wird also ebenso um 2 nach links verschoben, das heisst $[-2, 0]$. Der Wertebereich bleibt $[0, 1]$.



f) Hier wird der gesamte Graph um 1 in die positive x-Richtung verschoben. Der Definitionsbereich wird also ebenso um 1 nach rechts verschoben, das heisst $[1, 3]$. Der Wertebereich bleibt $[0, 1]$.



g) Hier wird der gesamte Graph an der y-Achse gespiegelt. Der Definitionsbereich wird also ebenso an der y-Achse gespiegelt, das heisst $[-2, 0]$. Der Wertebereich bleibt $[0, 1]$.



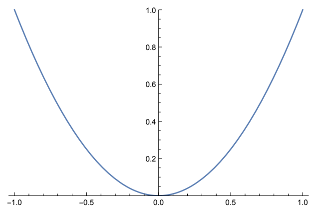
h) Hier geschehen drei Veränderungen zur ursprünglichen Funktion. Der Graph von f wird wegen $x + 1$ um 1 in negative x-Richtung verschoben. Ausserdem wird das ganze auf Grund des negativen Vorzeichens noch an der x-Achse gespiegelt. Das gesamte Ergebnis wird dann noch um 1 in positive y-Richtung verschoben. Der Definitionsbereich wird also zuerst von $[0, 2]$ um 1 nach links verschoben, also $[-1, 1]$. Die anderen beiden Operationen betreffen nur den Wertebereich. Dieser ist zu Beginn $[0, 1]$. Durch die Spiegelung an der x-Achse wird dies zu $[-1, 0]$. Danach wird jedoch wieder um 1 in die positive y-Richtung verschoben, was letztlich wieder den Wertebereich $[0, 1]$ ergibt.

3. Bestimmen Sie den Definitionsbereich und den Wertebereich jeder Funktion. Entscheiden Sie, ob die Funktion gerade, ungerade oder keines von beiden ist.

a) $f(x) = 5 - 2x$

b) $f(t) = \frac{1}{t-1}$

c) $g(x) = \sqrt{|x|}$



d) $G(u) = \frac{u}{|u|}$

e) $H(w) = \sqrt{5w + 10}$

Lösung

a) Diese Funktion ist auf den ganzen reellen Zahlen definiert und nimmt auch alle reellen Zahlen als Werte an. Deshalb ist sowohl der Definitionsbereich als auch der Wertebereich das Intervall $(-\infty, \infty)$. Die Funktion ist weder gerade noch ungerade.

b) Wir müssen eine Division durch 0 ausschliessen, weshalb der Definitionsbereich durch $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ gegeben ist. Es werden alle Werte ausser 0 angenommen, weshalb der Wertebereich $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ ist. Die Funktion ist weder gerade noch ungerade.

c) Da der Betrag jeder reellen Zahl nicht negativ ist, ist die Funktion für alle reellen Zahlen definiert. Der Definitionsbereich ist also $(-\infty, \infty)$. Der Wertebereich ist dann $[0, \infty)$. Wir haben $g(-x) = \sqrt{|-x|} = \sqrt{|x|} = g(x)$, die Funktion ist also gerade.

d) Wir müssen eine Division durch 0 ausschliessen, weshalb der Definitionsbereich durch $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ gegeben ist. Die Funktion G liefert $+1$, falls $u > 0$ und -1, falls $u < 0$. Der Wertebereich von G ist daher $\{-1, +1\}$. Wegen $G(-u) = \frac{-u}{|-u|} = \frac{-u}{|u|} = -\frac{u}{|u|} = -G(u)$ ist G eine ungerade Funktion.

e) Der Ausdruck unter der Wurzel darf nicht negativ sein, wir benötigen also $5w + 10 \geq 0$, was genau für $w \geq -2$ der Fall ist. Der Definitionsbereich ist also $[-2, \infty)$ und der Wertebereich $[0, \infty)$. Die Funktion ist weder gerade noch ungerade.

4. Die Funktionen $f(x) = x - 3$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x^3$ und $j(x) = 2x$ seien gegeben. Drücken Sie jede der unten angegebenen Funktionen durch eine Verkettung von einer oder mehreren der Funktionen f, g, h und j aus.

a) $y = \sqrt{x} - 3$

b) $y = 2\sqrt{x}$

c) $y = x^{\frac{1}{4}}$

d) $y = 4x$

e) $y = \sqrt{(x-3)^3}$

f) $y = (2x - 6)^3$

Lösung

a) $f(g(x)) = g(x) - 3 = \sqrt{x} - 3$

b) $j(g(x)) = 2g(x) = 2\sqrt{x}$

c) $g(g(x)) = \sqrt{g(x)} = g(x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{4}}$

d) $j(j(x)) = 2j(x) = 2(2x) = 4x$

e) $g(h(f(x))) = \sqrt{h(f(x))} = \sqrt{f(x)^3} = \sqrt{(x-3)^3}$

f) $h(j(f(x))) = (j(f(x)))^3 = (2f(x))^3 = (2(x-3))^3 = (2x-6)^3$

5. Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{array}{ll} f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & x \mapsto 2x - 6 \\ f_2\colon \mathbb{R} \to [0,\infty), & x \mapsto |x| \\ f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & x \mapsto \min\{x^2 - 9, 0\} \\ f_4\colon \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}, & x \mapsto \frac{x+1}{f_1(x)}. \end{array}$$

a) Untersuchen Sie alle Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

b) Skizzieren Sie auf dem Intervall $[-5, 5]$ die Funktionen $g := f_3 - f_1$,

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f_3(x) - f_1(x),$$

und $h := f_2 \circ g$,

$$h : \mathbb{R} \to [0,\infty), \qquad x \mapsto f_2(g(x)).$$

c) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f_4^{-1} : \mathrm{Im}(f_4) \to \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Lösung

a) In der Vorlesung wurde für eine Funktion f Injektivität definiert als

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Das ist logisch äquivalent zu

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

f_1 ist bijektiv:

$2x_1 - 6 = 2x_2 - 6 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2$ $\qquad$ f_1 ist injektiv

$y \in \mathbb{R}$ beliebig, wähle $x = \dfrac{y+6}{2} \;\Rightarrow\; f_1(x) = y$ $\qquad$ f_1 ist surjektiv

f_2 ist surjektiv, jedoch nicht injektiv:

(z.B.) für $x_1 = -1 \neq x_2 = 1$ ist $f_2(x_1) = f_2(x_2)$ $\qquad$ f_2 ist nicht injektiv

$y \in [0,\infty)$ beliebig, wähle z.B. $x = -y \;\Rightarrow\; f_2(x) = y$ $\qquad$ f_2 ist surjektiv

f_3 ist weder injektiv, noch surjektiv:

(z.B.) für $x_1 = -5 \neq x_2 = 8$ ist $f_3(x_1) = f_3(x_2)$	f_3 ist nicht injektiv
(z.B.) für $y = 2$ gibt es kein $x \in \mathbb{R}$, so dass $f_3(x) = y$	f_3 ist nicht surjektiv

f_4 ist injektiv, jedoch nicht surjektiv:
Wir beginnen, indem wir $f_4(x)$ umformen:

$$\begin{aligned} f_4(x) &= \frac{x+1}{2x-6} = \frac{1}{2}\frac{x+1}{x-3} = \frac{1}{2}\frac{(x-3)+4}{x-3} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4}{x-3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{x-3}. \end{aligned}$$

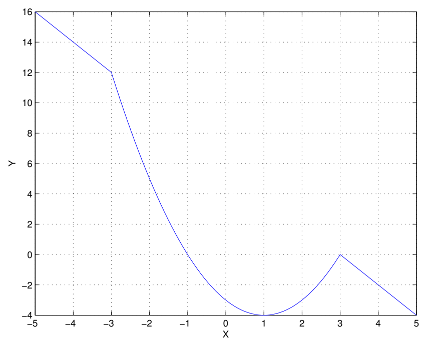
Damit erkennt man leichter:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{x_1 - 3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{x_2 - 3} \Rightarrow \frac{2}{x_1 - 3} = \frac{2}{x_2 - 3}$$

$$\Rightarrow x_1 - 3 = x_2 - 3 \Rightarrow x_1 = x_2 \qquad f_4 \text{ ist injektiv}$$

$$\frac{2}{x-3} \neq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}, \text{so dass } \frac{1}{2} \notin \mathrm{Im}(f_4) \qquad f_4 \text{ ist nicht surjektiv}$$

b) Funktion g:

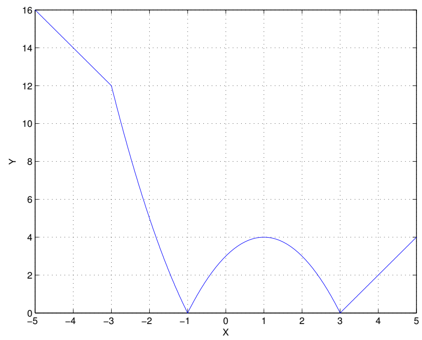


Funktion h:

Bemerkung: Da f_2 die Betragsfunktion ist, erhält man den Graphen von h, indem man den Teil des Graphen von g, welcher unterhalb der x-Achse liegt, an der x-Achse spiegelt.

c) Wir müssen die Gleichung $y = f_4(x)$ nach x auflösen:

$$\begin{aligned} y = \frac{x+1}{2x-6} \quad &\Leftrightarrow \quad x + 1 = 2xy - 6y \\ &\Leftrightarrow \quad 6y + 1 = 2xy - x \\ &\Leftrightarrow \quad 6y + 1 = x(2y-1) \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{6y+1}{2y-1}. \end{aligned}$$



Jetzt vertauschen wir noch die Variablen x und y und erhalten:

$$f_4^{-1} : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} \to \mathbb{R} \setminus \{3\}, \qquad x \mapsto \frac{6x+1}{2x-1}.$$

6. Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Welche Eigenschaften von f werden durch die folgenden Formeln beschrieben?

a) $\exists \alpha \in \mathbb{R}\, \forall x \in \mathbb{R} : \; f(x) = \alpha$.

b) $\forall \alpha \in \mathbb{R}\, \exists x \in \mathbb{R} : \; f(x) \geq \alpha$.

c) $\exists \alpha \in \mathbb{R}_{\neq 0}\, \forall x \in \mathbb{R} : \; f(x+\alpha) = f(x)$.

Lösung

a) Die Funktion nimmt für alle x den selben Wert an, es handelt sich also um eine konstante Funktion.

b) Die Aussage bedeutet, dass f nach oben unbeschränkt ist. Für jede mögliche obere Schranke c wählen wir $\alpha = c + 1$ und finden ein x in $\mathbb{R}$, so dass $f(x) \geq \alpha > c$. Damit kann es keine obere Schranke geben.

c) Für alle $k \in \mathbb{Z}$ erhalten wir

$$f(x + k\alpha) = f((x + (k-1)\alpha) + \alpha) = f(x + (k-1)\alpha) = \cdots = f(x+\alpha) = f(x).$$

Somit nimmt f jeweils im Abstand α immer wieder den selben Wert an und ist damit periodisch mit Periode α.

Beispielsweise sind die Funktionen $\cos x$ und $\sin x$ periodisch mit Periode 2π.