Serie 6 - Funktionen II + Differentialrechnung

1. a) Sei

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1, & \text{falls } x < 0, \\ cx + d, & \text{falls } 0 \leq x \leq 1, \\ \sqrt{x+8}, & \text{falls } x > 1. \end{cases}$$

Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{R}$, so dass f überall stetig ist.

b) Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-b^2}{x-b}, & \text{falls } x \neq b, \\ 0, & \text{falls } x = b. \end{cases}$$

i. Existiert $g(b)$?
ii. Existiert der Grenzwert $\lim_{x\to b} g(x)$?
iii. Ist $g(x)$ stetig im Punkt $x = b$?

Lösung

a) Polynomfunktionen und die Wurzelfunktion sind stetig. Daher bleibt Stetigkeit in den Punkten $x_0 = 0$ und $x_0 = 1$ zu prüfen. Es muss jeweils gelten:

$$\lim_{x\uparrow x_0} f(x) = f(x_0) = \lim_{x\downarrow x_0} f(x).$$

Wir haben für $x_0 = 0$

$$\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\uparrow 0} 3x^2 - 1 = -1$$
$$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} cx + d = f(0) = d,$$

also $-1 = d$. Für $x_0 = 1$ erhalten wir $c + d = 3$ und folglich ist f stetig für $c = 4$ und $d = -1$.

b) i. Der Funktionswert ist definiert durch $g(b) = 0$.
ii. Wir berechnen

$$\lim_{x\to b} g(x) = \lim_{x\to b} \frac{x^2 - b^2}{x - b} = \lim_{x\to b} \frac{(x+b)(x-b)}{x-b} = \lim_{x\to b} x + b = 2b.$$

iii. Die Funktion g ist stetig in b falls $\lim_{x\to b} g(x) = g(b)$, also nur für $b = 0$.

2. *(Zwischenwertsatz)*

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\sin x = 1 - \frac{\sin x}{\cos x}$$

eine Lösung in $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ hat.

b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f\colon [a,b] \to [a,b]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt hat.

c) **Challenge.** Es sei $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = f(2)$. Zeigen Sie: $\exists c \in [0,1]$ mit $f(c) = f(c+1)$.

Lösung

a) Wir definieren die stetige Hilfsfunktion $h\colon [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}$ durch

$$h(x) = 1 - \frac{\sin x}{\cos x} - \sin x.$$

Die Hilfsfunktion haben wir so gewählt, dass die Nullstellen von h genau obige Gleichung erfüllen. Wir müssen also zeigen, dass h mindestens eine Nullstelle besitzt. Es gilt $h(-\frac{\pi}{4}) = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$ und $h(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$. Null liegt also in $[h(\frac{\pi}{4}), h(-\frac{\pi}{4})]$ und nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ mit $h(x) = 0$. Für dieses x gilt nun $\sin x = 1 - \frac{\sin x}{\cos x}$.

b) Wir suchen ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = x$. Wiederum konstruieren wir eine passende Hilfsfunktion. Definiere

$$h(x) = f(x) - x.$$

Da $a \leq f(x) \leq b$ haben wir

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - a \geq a - a = 0 \\ h(b) &= f(b) - b \leq b - b = 0. \end{aligned}$$

Es existiert also nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in [a,b]$ mit $h(x) = f(x) - x = 0$, d.h. $f(x) = x$.

c) Unsere Hilfsfunktion lautet

$$h(x) = f(x) - f(x+1).$$

Beachte, dass h nur auf $[0,1]$ definiert ist. Wir berechnen

$$\begin{aligned} h(0) &= f(0) - f(1) \\ h(1) &= f(1) - f(2) = f(1) - f(0) = -h(0). \end{aligned}$$

Folglich gilt $h(0) \leq 0 \leq h(1)$ oder $h(1) \leq 0 \leq h(0)$ und mit dem Zwischenwertsatz gibt es ein $c \in [0,1]$ mit $h(c) = 0$ und somit $f(c) = f(c+1)$.

3. *(Mittelwertsatz)*

a) Leiten Sie den Mittelwertsatz aus dem Satz von Rolle her:

Mittelwertsatz. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf (a,b) differenzierbar ist. Dann existiert ein $c \in (a,b)$ mit

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

b) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf (a,b) differenzierbar ist. Beweisen Sie:

$$\forall x \in (a,b) : f'(x) = 0 \Rightarrow f \text{ konstant}$$

c) Seien $f,g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, die auf (a,b) differenzierbar sind. Beweisen Sie:

$$\forall x \in (a,b) : f'(x) = g'(x) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \text{ s.d. } \forall x \in [a,b] : f(x) = g(x) + c$$

Lösung

a) Die Gerade durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ist gegeben durch

$$g(x) = f(a) + \frac{x-a}{b-a}(f(b) - f(a)).$$

Betrachte nun die Funktion $h(x) = f(x) - g(x)$ mit $h(a) = h(b) = 0$. Nach dem Satz von Rolle existiert ein $c \in (a,b)$ mit $h'(c) = 0$, also

$$f'(c) = g'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

b) Falls f nicht konstant ist, so existieren zwei Punkte $c, d \in [a,b]$ mit $c < d$ und $f(c) \neq f(d)$. Nach dem Mittelwertsatz existier also ein $x \in [c,d]$ mit

$$f'(x) = \frac{f(d) - f(c)}{d-c} \neq 0.$$

Dies ist ein Widerspruch. Also muss f konstant sein.

c) Betrachte die Hilfsfunktion $h(x) = f(x) - g(x)$. Für alle $x \in [a,b]$ gilt nach Voraussetzung $h'(x) = 0$. Aus Teilaufgabe b) folgt nun $h(x) = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$, also $f(x) = g(x) + c$.

4. Repetition. Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x \sin x$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2+3}$

c) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

d) $f(x) = e^{-x}$

e) $f(x) = (\tan x)^2$

f) $f(x) = \sqrt{\ln x}$

g) $f(x) = \tan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

h) $f(x) = \sqrt{x^2 + \sqrt{x^2+1}}$

Lösung

a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\sin x) = \sin x + x\cos x$ (Produktregel)

b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((x^2+3)^{-1}\right) = (-1)(x^2+3)^{-2}\cdot 2x = \frac{-2x}{(x^2+3)^2}$ (Kettenregel)

c) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\sin x}\right) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$ (Kettenregel oder Quotientenregel)

d) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-x}\right) = -e^{-x}$ (Kettenregel)

e) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((\tan x)^2\right) = 2(\tan x)\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = 2\frac{\sin x}{\cos^3 x}$ (Kettenregel, Abl. von $\tan x$)

f) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{\ln x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$ (Kettenregel und Ableitung von $\ln x$)

g)

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\tan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right) &\overset{\text{(Kettenr.)}}{=} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\
&\overset{\text{(Quotientenr.)}}{=} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}\cdot\underbrace{\frac{1\cdot(1-x)-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2}}_{=\frac{2}{(1-x)^2}} \\
&= \frac{2}{(1-x)^2\cos^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}
\end{aligned}
$$

h)

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+1}}\right) &\overset{\text{(Kettenr.)}}{=} \frac{1}{2\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+1}}}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2+\sqrt{x^2+1}\right) \\
&\overset{\text{(Kettenr.)}}{=} \frac{1}{2\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+1}}}\cdot\left(2x+\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2+1)}{2\sqrt{x^2+1}}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+1}}}\cdot\left(2x+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+1}}}\cdot\frac{2\sqrt{x^2+1}+1}{2\sqrt{x^2+1}}
\end{aligned}
$$

5. Bestimmen Sie die Werte der Konstanten a und b so, dass

$$f(x) = ax^2 + bx$$

im Punkt $(1, 2)$ ein globales Maximum hat.

Lösung Es muss folgendes gelten:

$$
\begin{aligned}
f(1) &= a + b = 2 \\
f'(1) &= 2a + b = 0 \\
f''(1) &= 2a < 0
\end{aligned}
$$

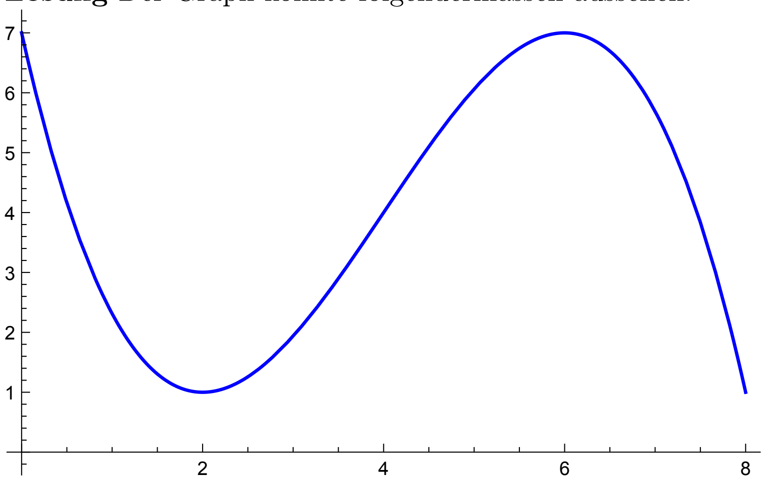
Aus den ersten beiden Gleichungen folgt $a = -2$ (< 0) und $b = 4$. Somit hat $f(x) = -2x^2 + 4$ ein globales Maximum in $(1, 2)$.

6. Skizzieren Sie den Graphen einer zweimal differenzierbaren Funktion $y = f(x)$, die folgende Eigenschaften besitzt:

x	y	Ableitungen
$x < 2$		$y' < 0, y'' > 0$
$x = 2$	1	$y' = 0, y'' > 0$
$2 < x < 4$		$y' > 0, y'' > 0$
$x = 4$	4	$y' > 0, y'' = 0$
$4 < x < 6$		$y' > 0, y'' < 0$
$x = 6$	7	$y' = 0, y'' < 0$
$x > 6$		$y' < 0, y'' < 0$

Markieren Sie nach Möglichkeiten bestimmte Punkte in ihrem Koordinatensystem und identifizieren Sie die Intervalle, auf denen die Funktion monoton, konvex oder konkav ist.

Lösung Der Graph könnte folgendermassen aussehen:



Im Punkt $(2, 1)$ hat die Funktion ein lokales Minimum, im Punkt $(4, 4)$ einen Wendepunkt und im Punkt $(6, 7)$ ein lokales Maximum. Für $x < 2$ und $x > 6$ ist die Funktion streng monoton fallend und auf $(2, 6)$ streng monoton wachsend. Für $x < 4$ ist sie konvex und für $x > 4$ konkav.