Lösung: Serie 7 - Hyperbelfunktionen Newton-Verfahren

1.

a)

$$\begin{array}{rrcl} & y & = & \frac{e^x+e^{-x}}{2} \\ \Leftrightarrow & e^{2x} - 2ye^x + 1 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & e^x & = & y \pm \sqrt{y^2-1}. \end{array}$$

Da $y \geq 1$ ist, ist die Wurzel auf der rechten Seite immer reell. Wir interessieren uns nur für nichtnegative x. Der Logarithmus einer positiven Zahl ist genau dann nichtnegativ, wenn die Zahl grösser gleich 1 ist. Um zu sehen, wann $y \pm \sqrt{y^2-1} \geq 1$, müssen wir das $\pm$ auseinander nehmen. Wir rechnen

$$y + \sqrt{y^2-1} \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{y^2-1} \geq 1 - y.$$

Die linke Seite ist nichtnegativ, die rechte nichtpositiv, also ist die obere Ungleichung immer erfüllt. Weiter gilt

$$\begin{array}{rrcl} & y - \sqrt{y^2-1} & \geq & 1 \\ \Leftrightarrow & -\sqrt{y^2-1} & \geq & 1-y \\ \Leftrightarrow & y^2-1 & \leq & (1-y)^2 = 1-2y+y^2 \\ \Leftrightarrow & 2y & \leq & 2 \\ \Leftrightarrow & y & \leq & 1, \end{array}$$

aber der Wertebereich von cosh ist $[1, \infty)$. Deshalb ist die Umkehrfunktion des Cosinus Hyperbolicus

$$\operatorname{arcosh}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right).$$

b) **Kettenregel:**
Da $x = \cosh(\operatorname{arcosh}(x))$, gilt mit der Kettenregel

$$1 = (\cosh(\operatorname{arcosh}(x)))' = \cosh'(\operatorname{arcosh}(x)) \operatorname{arcosh}'(x).$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{arcosh}'(x) &= \frac{1}{\cosh'(\operatorname{arcosh}(x))} = \frac{1}{\sinh(\operatorname{arcosh}(x))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(\operatorname{arcosh}(x)) - 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}. \end{aligned}$$

Direkt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{arcosh}'(x) &= \left(\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right)' \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)' \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\left(x^2-1\right)'\right) \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x\right) \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.
\end{aligned}$$

2.

a) Es gilt $\tanh x = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ und folglich

$$f(x) = \frac{1+\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}{1+\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{e^{2x}+2+e^{-2x}}} = \frac{\frac{2e^x}{e^x+e^{-x}}}{\frac{2(e^{2x}+e^{-2x})}{(e^x+e^{-x})^2}} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}+e^{-2x}}.$$

Wir erhalten

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1+e^{-2x}}{1+e^{-4x}} = 1,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{4x}+e^{2x}}{e^{4x}+1} = 0.$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned}
f'(x) = \left(\frac{1+e^{-2x}}{1+e^{-4x}}\right)' &= \frac{(-2e^{-2x})(1+e^{-4x})-(1+e^{-2x})(-4e^{-4x})}{(1+e^{-4x})^2} \\
&= -\frac{2e^{-2x}(1-2e^{-2x}-e^{-4x})}{(1+e^{-4x})^2} < 0,
\end{aligned}$$

genau dann, wenn $1-2e^{-2x}-e^{-4x} > 0$.

Wir substituieren $z = e^{-2x} > 0$ und erhalten $1-2z-z^2 = 0$, falls

$$z = \frac{-2\pm\sqrt{4+4}}{2} = \sqrt{2}-1,$$

beziehungsweise $x = -\frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}-1) = \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})$.

Bemerke, dass $1-2e^{-2x}-e^{-4x}$ als Summe monoton wachsender Funktionen ebenfalls monoton wachsend ist. Folglich gilt $f'(x) < 0$ genau dann, wenn $x > \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})$. Also ist die Funktion f auf der Menge $(\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}), \infty)$ streng monoton fallend und daher auch injektiv.

c) Da

$$f(\tfrac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})) = \frac{1+(\sqrt{2}-1)}{1+(\sqrt{2}-1)^2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

und $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$, ist

$$f\colon \left(\tfrac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}),\infty\right) \to \left(1, \tfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$$

bijektiv.

Um die Umkehrfunktion zu bestimmen, substituieren wir wieder $z = e^{-2x}$:

$$\begin{aligned} & y = \frac{1+e^{-2x}}{1+e^{-4x}} = \frac{1+z}{1+z^2} \\ \Leftrightarrow\quad & yz^2 - z + (y-1) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4y(y-1)}}{2y}. \end{aligned}$$

Da $z \to 0$ für $x \to \infty$, beziehungsweise $y \to 1$, muss $z = \frac{1-\sqrt{1-4y(y-1)}}{2y}$ und folglich $x = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\sqrt{1-4y(y-1)}}{2y}\right)$ gelten. Die Umkehrfunktion ist somit gegeben durch

$$f^{-1}\colon \left(1, \tfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right) \to \left(\tfrac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}),\infty\right),$$

mit

$$f^{-1}(x) = -\tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\sqrt{1-4x(x-1)}}{2x}\right).$$

3.

a) Für das Newtonverfahren haben wir in der Vorlseung die Rekursionsformel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

hergeleitet. In unserem Beispiel gilt $f'(x) = 2x$ und folglich haben wir

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{x_n^2-2}{2x_n} = \frac{2x_n^2 - x_n^2 + 2}{2x_n} \\ &= \frac{x_n^2+2}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \end{aligned}$$

Wir erhalten $x_1 = \frac{3}{2} = 1.5, x_2 = \frac{17}{12} \approx 1.4167, x_3 \approx 1.414216.$

b) Mit $f'(x) = 3x^2 - 2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{x_n^3 - 2x_n + 2}{3x_n^2 - 2} \\ &= \frac{3x_n^3 - 2x_n - x_n^3 + 2x_n - 2}{3x_n^2 - 2} = \frac{2x_n^3 - 2}{3x_n^2 - 2}. \end{aligned}$$

Somit gilt $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, \ldots$ und das Newtonverfahren konvergiert nicht. Das Problem liegt darin, dass wir den Startwert zu weit von der Nullstelle entfernt gewählt haben. Zum Beispiel liegt eine Extremalstelle, d.h. $\bar{x}$ mit $f'(\bar{x}) = 0$, zwischen x_0 und der Nullstelle.

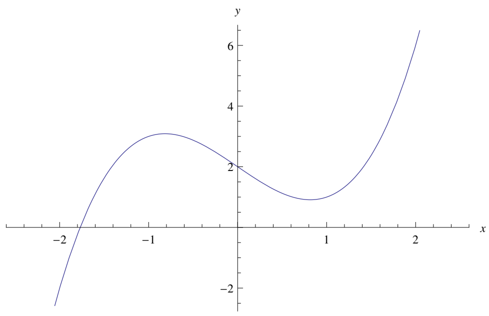


Abbildung 1: $f(x) = x^3 - 2x + 2$

c) i. Gesucht ist die Gerade durch $(x_n, f(x_n))$ mit Richtungsvektor

$$\begin{pmatrix} x_{n-1} - x_n \\ f(x_{n-1}) - f(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ f(x_{n-1}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_n \\ f(x_n) \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ f(x_n) \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} x_{n-1} - x_n \\ f(x_{n-1}) - f(x_n) \end{pmatrix}$$

für $t \in \mathbb{R}$.

ii. Der Schnittpunkt mit der x-Achse finden wir durch lösen der Gleichung

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ f(x_n) \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} x_{n-1} - x_n \\ f(x_{n-1}) - f(x_n) \end{pmatrix}.$$

Die Gleichung für die y-Koordinate liefert

$$t = -\frac{f(x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}$$

und folglich erhalten wir

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)} \cdot (x_{n-1} - x_n) \\ &= x_n - \frac{(x_n - x_{n-1}) \cdot f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Betrachten wir den Grenzwert $x_{n-1} \to x_n$, so erhalten wir

$$\lim_{x_{n-1} \to x_n} \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} = f'(x_n)$$

und folglich die Rekursionsformel des Newton-Verfahrens.

iii. Für $f(x) = x^2 - 2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{(x_n - x_{n-1}) \cdot (x_n^2 - 2)}{x_n^2 - x_{n-1}^2} \\ &= x_n - \frac{(x_n - x_{n-1}) \cdot (x_n^2 - 2)}{(x_n - x_{n-1})(x_n + x_{n-1})} \\ &= \frac{x_n(x_n + x_{n-1})}{x_n + x_{n-1}} - \frac{x_n^2 - 2}{x_n + x_{n-1}} \\ &= \frac{x_n \cdot x_{n-1} + 2}{x_n + x_{n-1}}. \end{aligned}$$

Dies liefert $x_2 = 2, x_3 = \frac{4}{3} \approx 1.33, x_4 = \frac{7}{5} = 1.40.$

4.

a) Das Gesetz des Archimedes besagt, dass die Masse des Körpers derjenigen des verdrängten Wassers entspricht, also

$$m_K = m_W.$$

Die Masse können wir als Produkt des Volumens mit der Dichte des Materials bestimmen. Das Volumen des Holzbalken ist $V_K = r^2\pi \cdot l$ und dasjenige des verdrängten Wassers $V_W = \left[\frac{r^2}{2}\alpha + r^2 \sin\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right)\right] \cdot l$. Dabei lässt sich der Querschnitt des eingetauchten Teils des Balkens als Summe des Kreissektors mit Winkel α und des gleichschenkligen Dreiecks mit Grundseite $2r\sin\beta$ und Höhe $r\cos\beta$ berechnen.

b)

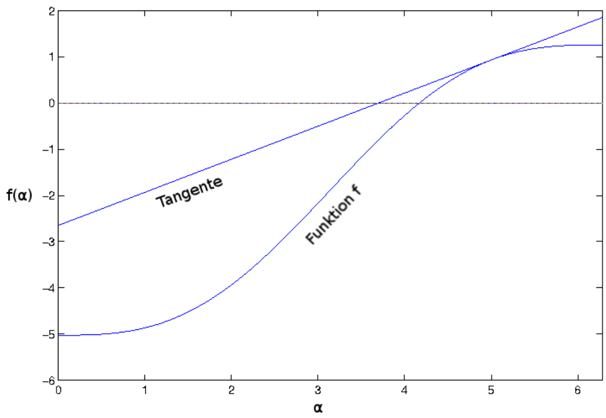
$$\begin{aligned} & & r^2\pi \cdot l\varrho_1 &= \left[\frac{r^2}{2}\alpha + r^2 \sin\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right)\right] \cdot l\varrho_0 \\ &\overset{\text{Mult. mit } 2/(r^2\varrho_0 l)}{\Leftrightarrow} & 2\pi\frac{\varrho_1}{\varrho_0} &= \alpha + \underbrace{2\sin\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right)}_{=\sin(\pi - \frac{\alpha}{2} + \pi - \frac{\alpha}{2}) \quad \text{(Additionstheorem)}} \\ &\overset{\varrho := \frac{\varrho_1}{\varrho_0}}{\Leftrightarrow} & 2\pi\varrho &= \alpha + \sin(2\pi - \alpha) \\ &\overset{\text{Periodizität von sin}}{\Leftrightarrow} & 2\pi\varrho &= \alpha + \sin(-\alpha) \\ &\overset{\text{sin ist ungerade}}{\Leftrightarrow} & 2\pi\varrho &= \alpha - \sin(\alpha) \end{aligned}$$

c) Zu lösen ist die Gleichung $\alpha - \sin\alpha = 2\pi\varrho$. Umstellen ergibt

$$f(\alpha) := \alpha - \sin\alpha - 2\pi\varrho = 0.$$

Es ist also die Nullstelle von $f(\alpha)$ gesucht.

d) Die Funktion sieht folgendermassen aus:



e) Die Gleichung der Tangente an den Graphen im Punkt $(5, f(5))$ lautet

$$\begin{aligned} T(\alpha) &= f(5) + f'(5)(\alpha - 5) \\ &= 5 - \sin(5) - 1.6\pi + (1 - \cos(5))(\alpha - 5). \end{aligned}$$

Auflösen von $T(\alpha_1) = 0$ liefert

$$\alpha_1 = 5 - \frac{5 - \sin(5) - 1.6\pi}{1 - \cos(5)} = 3.6984.$$

f) Die Idee des Newtonverfahrens besteht nun darin, in jedem Schritt die Tangente an den Graphen im Punkt $(\alpha_k, f(\alpha_k))$ zu legen und die **Nullstelle der Tangente** als neuen (hoffentlich besseren) Näherungswert α_{k+1} für die **Nullstelle von** f zu erhalten. Die Iterationsvorschrift des Newtonverfahrens lautet also

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1} &= \alpha_k - \frac{f(\alpha_k)}{f'(\alpha_k)} = \alpha_k - \frac{\alpha_k - \sin\alpha_k - 1.6\pi}{1 - \cos\alpha_k} \\ &= \frac{\sin\alpha_k + 1.6\pi - \alpha_k \cos\alpha_k}{1 - \cos\alpha_k}. \end{aligned}$$

Für die nächsten fünf Schritte ergeben sich

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= 4.130901763076111 \\ \alpha_3 &= 4.169629610070111 \\ \alpha_4 &= 4.170046299243220 \\ \alpha_5 &= 4.170046348278606 \\ \alpha_6 &= 4.170046348278607. \end{aligned}$$

Offensichtlich war der Startwert gut gewählt und das Verfahren konvergiert.

g) Der Winkel β (siehe Skizze auf dem Aufgabenblatt) ist gegeben durch

$$\beta = \frac{2\pi - \alpha}{2} \approx \frac{2\pi - \alpha_6}{2} \approx 1.056569479450490.$$

Die ungefähre Eintauchtiefe ist also

$$h = r + r\cos(\beta) \approx 1.49186\, r.$$