Analysis D-BAUG
Dr. Meike Akveld HS 2015

Serie 8 - Parametrisierte Kurven

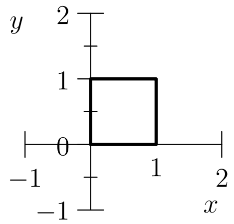
1. Geben Sie für die folgenden Bewegungen eines Punktes jeweils eine parametrisierte Darstellung

$$I = [0,1] \to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

an.

a) Geradlinige Bewegung von $P_1 = (x_1, y_1)$ nach $P_2 = (x_2, y_2)$, wobei $P_1 \neq P_2$.

b) Einmaliger Umlauf um das Einheitsquadrat (siehe Bild), startend im Ursprung, gegen den Uhrzeigersinn.



c) Dreimaliger Umlauf im Uhrzeigersinn eines Kreises mit Mittelpunkt $(5,0)$ und Radius 4 mit Start beim Punkt $(5,4)$.

Lösung

a) Der Vektor, der von P_1 nach P_2 zeigt, ist

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

und daher ist die Lösung

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y_1 + t(y_2 - y_1) \end{pmatrix}.$$

Überprüfe, dass wirklich $(x(0), y(0)) = P_1$ und $(x(1), y(1)) = P_2$.

b) Wir wenden Teil a) an. Im ersten Viertel der Zeit gehen wir von $(0,0)$ nach $(1,0)$, im zweiten von $(1,0)$ nach $(1,1)$, etc. Da wir für eine Strecke nur ein Viertel der Zeit brauchen dürfen, müssen wir die Geschwindigkeit mit 4 multiplizieren.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 + 4t(1-0) \\ 0 + 4t(0-0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t \\ 0 \end{pmatrix} & \text{falls } t \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ \begin{pmatrix} 1 + (4t-1)(1-1) \\ 0 + (4t-1)(1-0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4t-1 \end{pmatrix} & \text{falls } t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \\ \begin{pmatrix} 1 + (4t-2)(0-1) \\ 1 + (4t-2)(1-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-4t \\ 1 \end{pmatrix} & \text{falls } t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \\ \begin{pmatrix} 0 + (4t-3)(0-0) \\ 1 + (4t-3)(0-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4-4t \end{pmatrix} & \text{falls } t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}$$

c) Dreimaliger Umlauf im Uhrzeigersinn eines Kreises mit Mittelpunkt $(5,0)$ und Radius 4 mit Start beim Punkt $(5,4)$.

d) Wir starten mit dem Einheitskreis, der bekannterweise mit

$$\begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix}$$

einmal gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Wir starten bei unserem Kreis jedoch nicht am rechtesten, sondern am obersten Punkt. Auf den Einheitskreis umgemünzt müssen wir $\pi/2$ zum Winkel addieren:

$$\begin{pmatrix} \cos(2\pi t + \pi/2) \\ \sin(2\pi t + \pi/2) \end{pmatrix}.$$

Nun wollen wir jedoch in die umgekehrte Richtung gehen. In die umgekehrte Richtung gehen bedeutet, zum Zeitpunkt t dort zu sein, wo man sonst t Zeiteinheiten vor der Ankunft wäre. Das heisst, wir müssen t durch $1-t$ ersetzen.

Wir wollen dreimal um den Kreis, also müssen wir die Geschwindigkeit verdreifachen. Den Einheitskreis dreimal im Uhrzeigersinn durchlaufen ist also

$$\begin{pmatrix} \cos(6\pi(1-t) + \pi/2) \\ \sin(6\pi(1-t) + \pi/2) \end{pmatrix}.$$

Der Kreis, der uns interessiert, hat Radius 4, also skalieren wir den Einheitskreis:

$$\begin{pmatrix} 4\cos(6\pi(1-t) + \pi/2) \\ 4\sin(6\pi(1-t) + \pi/2) \end{pmatrix}.$$

Beachte, dass $\cos(\varphi+\pi/2) = -\sin(\varphi)$ und $\sin(\varphi+\pi/2) = \cos(\varphi)$. Zu allerletzt müssen wir ihn noch verschieben und erhalten so die Lösung

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 4\sin(6\pi(1-t)) \\ 4\cos(6\pi(1-t)) \end{pmatrix}.$$

2. Wir betrachten ein rollendes Rad (z.B. einen Autoreifen). Als Modell dafür soll ein Kreis mit Radius R dienen, der in einem x-y-Koordinatensystem auf der positiven x-Achse abrollt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich die Radnabe an der Stelle $(0, R)$.

a) Zum Zeitpunkt $t = 0$ markieren wir den Punkt $P = (0, R-r)$ auf dem Rad, wobei $0 < r < R$ ist. Wie lautet die Kurve $P_t : [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$, welche die Bewegung dieses Punktes während des Abrollvorgangs beschreibt?

b) Skizzieren Sie die Kurve P_t für den Fall $r = \frac{R}{2}$.

c) Wie sieht die Kurve P_t im (theoretischen) Fall $r = \frac{3}{2}R$ aus?

Lösung

a) Die Radnabe bewegt sich gemäss folgender Kurve:

$$[0,\infty) \to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} R\,t \\ R \end{pmatrix}$$

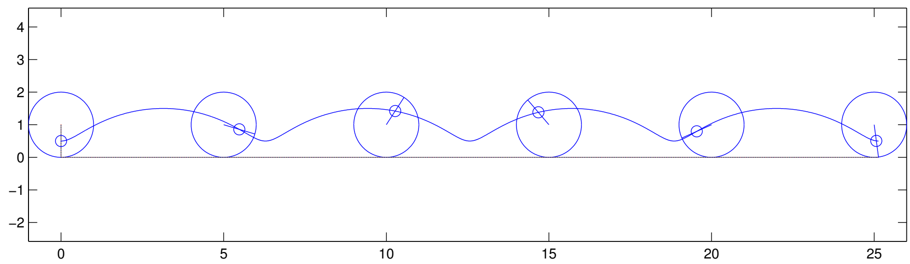
Der markierte Punkt bewegt sich **bzgl. der Radnabe** gemäss:

$$[0,\infty) \to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} -r\sin t \\ -r\cos t \end{pmatrix}$$

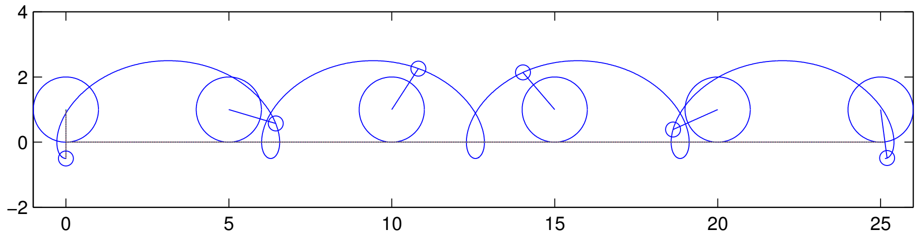
Durch Superposition erhalten wir also:

$$P_t : [0,\infty) \to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} R\,t \\ R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r\sin t \\ -r\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\,t - r\sin t \\ R - r\cos t \end{pmatrix}$$

b) Die folgende Abbildung zeigt $R = 1$, $r = \frac{1}{2}$. Zusätzlich zur Kurve ist das Rad für die Zeitpunkte $t = 0$, $t = 5$, $t = 10$, $t = 15$, $t = 20$ und $t = 25$ eingezeichnet.



c) Die folgende Abbildung zeigt die Kurve P_t für den Fall $R = 1$, $r = \frac{3}{2}$. Zusätzlich zur Kurve ist wieder das Rad für die Zeitpunkte $t = 0$, $t = 5$, $t = 10$, $t = 15$, $t = 20$ und $t = 25$ eingezeichnet.



3. *(Evolute - Geometrischer Ort der Krümmungsmittelpunkte)*

a) Finden Sie für die Parabel $y = 1 - x^2$ eine Darstellung als Kurve

$$r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie für die in (a) gefundene Kurve die Einheitsnormale $n(t)$.

c) Berechnen Sie die Krümmung der Kurve als Funktion von t gemäss der Formel

$$k(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{3/2}}.$$

d) Berechnen Sie den geometrischen Ort

$$M(t) = r(t) + \frac{1}{k(t)} \cdot n(t)$$

aller Krümmungsmittelpunkte (die sogenannte Evolute) der obigen Kurve.

e) Skizzieren Sie die Parabel zusammen mit ihrer Evolute.

f) Sei $y = f(x)$ eine Kurve in expliziter Form, wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion ist. Beweisen Sie für die Krümmung an der Stelle x die Formel

$$k(x) = \frac{f''(x)}{(1 + f'^2(x))^{\frac{3}{2}}}.$$

Benutzen Sie diese Formel, um die Krümmung der Parabel aus Teilaufgabe (a) zu bestimmen und vergleichen Sie das Ergebnis mit Ihrem Resultat aus Teilaufgabe (c).

Lösung

a) Wir setzen $x(t) = t$. Dann muss $y(t) = 1 - (x(t))^2 = 1 - t^2$ gelten. Insgesamt bekommen wir also

$$r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad r(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 - t^2 \end{pmatrix}.$$

b) Der Tangentialvektor lautet

$$\dot{r}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2t \end{pmatrix}.$$

Drehen wir diesen um 90° gegen den Uhrzeigersinn, so erhalten wir $(2t, 1)^{\mathsf{T}}$. Durch Normieren erhalten wir also

$$n(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\,t^2}} \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Es gilt

$$\ddot{r}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

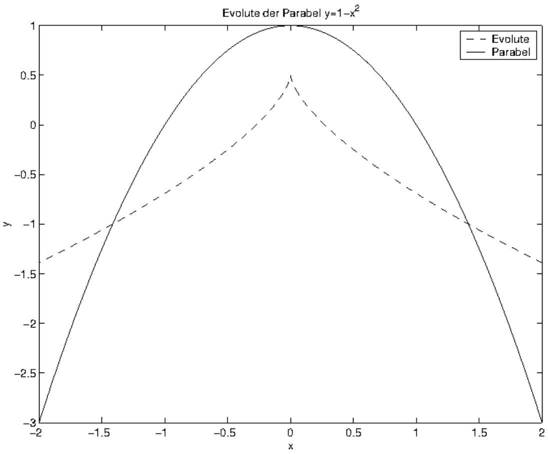
Einsetzen in die Formel für die Krümmung ergibt:

$$k(t) = \frac{1 \cdot (-2) - (-2t) \cdot 0}{(1 + 4\,t^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2}{(1 + 4\,t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

d) Einsetzen liefert

$$
\begin{aligned}
M(t) &= r(t) + \frac{1}{k(t)} \cdot n(t) \\
&= \begin{pmatrix} t \\ 1-t^2 \end{pmatrix} - \frac{(1+4\,t^2)^{\frac{3}{2}}}{2} \frac{1}{\sqrt{1+4\,t^2}} \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} t \\ 1-t^2 \end{pmatrix} - \frac{1+4\,t^2}{2} \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -4t^3 \\ \frac{1}{2} - 3t^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

e) Die Evolute sieht folgendermassen aus:



f) Wir parametrisieren die Kurve $y = f(x)$ durch $r(t) = (t, f(t))$. Dann können wir die Formel für die Krümmung direkt benutzen und erhalten

$$
\begin{aligned}
k(t) &= \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \\
&= \frac{f''(t)}{(1 + f'(t)^2)^{3/2}}.
\end{aligned}
$$

Für die Parabel $y = f(x) = 1 - x^2$ gilt

$$
\begin{aligned}
f'(t) &= -2t, \\
f''(t) &= -2.
\end{aligned}
$$

Einsetzen in die obige Formel liefert die gleiche Krümmung wie in Teilaufgabe (c):

$$
k(t) = -\frac{2}{(1+4t^2)^{3/2}}.
$$

4. Prüfungsaufgabe 3, Sommer 2009. Eine Kanonenkugel wird vom Punkt $(0, 0)$ aus mit Geschwindigkeit v unter einem Winkel $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gegenüber der positiven x-Achse abgeschossen. Behandelt man die Kugel als Punktmasse und orientiert die Schwerkraft in Richtung der negativen y-Achse, ist die Bewegung beschrieben durch:

$$\begin{aligned} x(t) &= v\cos(\varphi)t \\ y(t) &= v\sin(\varphi)t - 5t^2. \end{aligned}$$

a) Wie muss der Winkel φ bei vorgegebenem v gewählt werden, damit die Kugel möglichst weit fliegt, bevor sie auf dem Boden (der x-Achse) auftrifft? Argumentieren Sie, warum es sich bei dem von Ihnen gefundenen Wert tatsächlich um ein Maximum handelt!

b) Wo landet die Kugel bei diesem Abschusswinkel, wenn $v = 100$ ist?

Lösung

a) Wir bestimmen zuerst den Landepunkt $(x(t_*), y(t_*)) = (x_*, 0)$ für $t_* > 0$ in abhängigkeit des Abschusswinkels φ. Es gilt

$$\begin{aligned} y(t_*) = 0 &\Leftrightarrow 5t_*^2 = v\sin(\varphi)t_* \\ &\Leftrightarrow t_* = \tfrac{1}{5}v\sin(\varphi). \end{aligned}$$

Folglich erhalten wir die Funktion x_* von φ gegeben durch

$$x_*(\varphi) = x(t_*)(\varphi) = \tfrac{1}{5}v^2\cos\varphi\sin\varphi.$$

Um das Maximum zu bestimmen, berechnen wir die erste Ableitung nach φ.

$$\tfrac{\mathrm{d}x_*}{\mathrm{d}\varphi}(\varphi) = \frac{v^2}{5}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$

Es gilt

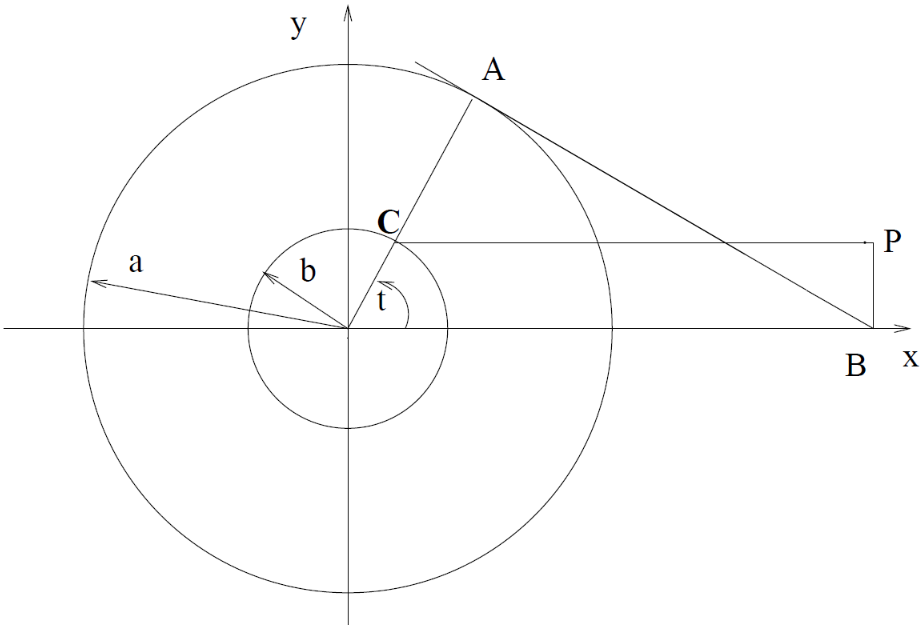
$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}x_*}{\mathrm{d}\varphi}(\varphi) = 0 &\Leftrightarrow \cos\varphi = \sin\varphi \\ &\Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Für $\varphi < \frac{\pi}{4}$ gilt $\frac{\mathrm{d}x_*}{\mathrm{d}\varphi}(\varphi) > 0$ und somit ist dort $x_*(\varphi)$ monoton wachsend. Andererseits ist die Ableitung für $\varphi > \frac{\pi}{4}$ negativ und folglich $x_*(\varphi)$ monoton fallend. Also handelt es sich beim Funktionswert dazwischen um ein Maximum.

b)

$$x_*\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{100^2 \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{5} = 1000$$

5. Prüfungsaufgabe 3, Sommer 2011. Gegeben sind die reellen Zahlen $a > b > 0$. Der Punkt $P(t)$ ist definiert in Abhängigkeit vom Winkel t (siehe Abbildung). Dabei ist die y-Koordinate von $P(t)$ gleich der y-Koordinate des entsprechenden Punktes C auf dem kleinen Kreis. Die x-Koordinate erhält man indem man die Tangente am ensprechenden Punkt auf dem grösseren Kreis mit der x-Achse schneidet. Bestimmen Sie die Parametriesierung $P(t)$, eliminieren Sie dann den Parameter t aus den Gleichungen und bestimmen Sie die Kurvengleichung. Skizzieren Sie diese Kurve.



Lösung Bemerke zuerst, dass $P(t)$ nur für $t \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ definiert ist. Da wir eine zusammenhängende Kurve wollen, beschränken wir uns daher auf $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Für $t \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ erhalten wir die entsprechende am Ursprung gespiegelte Kurve.
Die y-Koordinate ist gegeben durch $y(t) = b \sin t$. Um die x-Koordinate zu bestimmen betrachten wir das rechtwinklige Dreieck $A, (0,0), B$ und erhalten $x(t) = \frac{a}{\cos t}$, also

$$P(t) = \begin{pmatrix} \frac{a}{\cos t} \\ b \sin t \end{pmatrix}.$$

Um den Parameter t zu eliminieren, ersetzen wir zuerst $u = \sin t$ und folglich $\cos t = \sqrt{1 - u^2}$ ($\cos t > 0$). Mit $u = \frac{y}{b}$ erhalten wir

$$x = \frac{a}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}}$$

oder umgeformt

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right) = 1 \text{ und } x > 0.$$

Diese Kurve sieht folgendermassen aus