Serie 9 - Potenzreihen

1. Prüfungsaufgabe 2, Winter 2012. Eine Funktion $f : (-\rho, \rho) \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} x^n.$$

a) Ermitteln Sie den Konvergenzradius ρ dieser Potenzreihe.

b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion F von f derart, dass $F(0) = 0$. Stellen Sie F zunächst als Potenzreihe und anschliessend als elementare Funktion dar.

c) Verwenden Sie F um eine Darstellung von f als elementare Funktion zu erhalten.

Lösung

a) Um den Konvergenzradius zu bestimmen, verwenden wir das Quotientenkriterium:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot 2^{n+1}}{2^n \cdot (n+2)} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = 2.$$

b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion F von f derart, dass $F(0) = 0$. Stellen Sie F zunächst als Potenzreihe und anschliessend als elementare Funktion dar.

Da eine Potenzreihe innerhalb ihres Konvergenzradius absolut konvergiert, können wir f gliedweise integrieren um an eine Stammfunktion zu gelangen. Das ergibt

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} x^n \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{n+1}{2^n} x^n \,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{2^n} + C \overset{n+1=k}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2^k} x^k + C. \end{aligned}$$

Aus der Forderung $F(0) = 0$ erhalten wir $C = 0$. Es gilt also $F(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2^k} x^k$. Mit Hilfe der geometrischen Reihe können wir $F(x)$ als elementare Funktion schreiben:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{2^n} = x \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = x \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{2x}{2-x}.$$

c) Da F eine Stammfunktion von f darstellt, gilt

$$f(x) = F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{2x}{2-x} = \frac{2(2-x)+2x}{(2-x)^2} = \frac{4}{(2-x)^2}.$$

2. Prüfungsaufgabe 3, Sommer 2008. Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{2}{1-x+x^2-x^3}$$

in eine Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und bestimmen Sie deren Konvergenzradius.

Lösung Wir stellen fest, dass wir den Nenner der gegebenen Funktion faktorisieren können als

$$1 - x + x^2 - x^3 = (1 - x)(1 + x^2).$$

Wir machen daher für die Partialbruchzerlegung den Ansatz

$$f(x) = \frac{2}{(1 - x)(1 + x^2)} = \frac{A}{1 - x} + \frac{Bx + C}{1 + x^2}.$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner und Sortieren nach Potenzen von x liefert

$$2 = \underbrace{(A - B)}_{\overset{!}{=}0} x^2 + \underbrace{(B - C)}_{\overset{!}{=}0} x + \underbrace{(A + C)}_{\overset{!}{=}2}.$$

Durch einen Koeffizientenvergleich zwischen linker und rechter Seite finden wir $A = B = C = 1$. Die gesuchte Partialbruchzerlegung lautet daher

$$f(x) = \frac{1}{1 - x} + \frac{1 + x}{1 + x^2}.$$

Die geometrische Reihe liefert

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = (1 + x)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots) \\ \frac{1}{1 + x^2} &= \frac{1}{1 - (-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + x)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots) + (1 + x)(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots) \\ &= (1 + x)(2 + 2x^4 + 2x^8 + 2x^{12} + \cdots) \\ &= (1 + x) \sum_{k=0}^{\infty} 2x^{4k} = \sum_{k=0}^{\infty} (2x^{4k} + 2x^{4k+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \end{aligned}$$

mit

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{für } n = 4k \text{ und } n = 4k + 1,\ k \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Konvergenzradius der Potenzreihendarstellung von $f(x)$ ist identisch mit dem Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2x^{4k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2(x^4)^k$ im Zwischenergebnis. (Da eine Potenzreihe innerhalb ihres Konvergenzkreises absolut konvergiert, hat der Vorfaktor $(1+x)$ keinen Einfluss.) Um den Konvergenzradius letzterer Reihe zu bestimmen, substituieren wir $x^4 =: y$ und erhalten damit die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2y^k$, deren Konvergenzradius offensichtlich 1 beträgt. Die Potenzreihe für $f(x)$ konvergiert also, falls $|x^4| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$. Ihr Konvergenzradius beträgt demnach ebenfalls 1.

3. Prüfungsaufgabe 3, Winter 2009. Die Koeffizienten der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ seien gegeben durch

$$a_0 = 2 \qquad \text{und} \qquad a_n = \frac{2(n+1)}{n} \cdot a_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Ermitteln Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe und zeigen Sie, dass diese im Inneren ihres Konvergenzkreises der Funktion $f(x) = \frac{2}{(1-2x)^2}$ entspricht.

Lösung Den Konvergenzradius können wir mit Hilfe des Quotientenkriteriums bestimmen:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n-1}}{\frac{2(n+1)}{n} \cdot a_{n-1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{2(1+\frac{1}{n})} \right| = \frac{1}{2}.$$

Um die Übereinstimmung der Potenzreihe mit $f(x) = \frac{2}{(1-2x)^2}$ zu bestätigen, entwickeln wir $f(x)$ in eine Potenzreihe und vergleichen anschliessend die beiden Potenzreihen. Wegen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-2x)^{-1} = 2(1-2x)^{-2}$ gilt

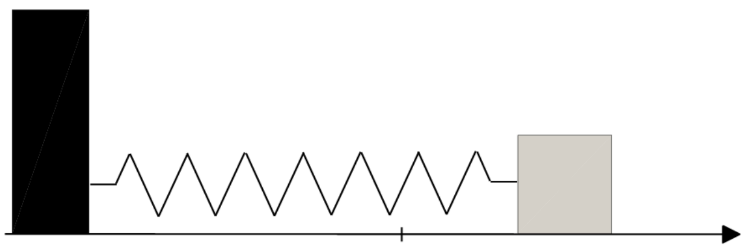
$$f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-2x}\right) \overset{(*)}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(2x)^k\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^k x^k\right] = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k k x^{k-1}$$
$$\overset{n=k-1}{=} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1}(n+1)x^n.$$

Gleichheit bei (*) gilt wegen der Summenformel für geometrische Reihen, denn wegen des Konvergenzradius 1/2 gilt $|2x| < 1$.
D.h. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $a_n = 2^{n+1}(n+1)$. Wir überprüfen nun leicht, dass $a_0 = 2^1 \cdot 1 = 2$ und

$$\frac{2(n+1)}{n} \cdot a_{n-1} = \frac{2(n+1)}{n} \cdot 2^n n = 2^{n+1}(n+1) = a_n.$$

Damit ist gezeigt, dass die gegebene Potenzreihe tatsächlich die Funktion $f(x)$ beschreibt.

4. *(Harmonischer Oszillator)*



Eine Masse m, welche mit einer Feder der Federkonstante k verbunden ist und entlang der x-Achse reibungsfrei schwingt, genügt der Gleichung

$$x''(t) = -\frac{k}{m}\, x(t).$$

Dabei bezeichnet $x(t)$ die Auslenkung aus der Ruhelage $x = 0$ zum Zeitpunkt t. Die Vorgabe von sogenannten Anfangswerten $x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$ für Auslenkung bzw. Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ legt die Bewegung der Masse eindeutig fest.

Wir betrachten nun einen Spezialfall dieses physikalischen Problems und nehmen im Folgenden an, dass $\frac{k}{m} = 1$, $x_0 = 0$ und $v_0 = 1$. Wir wollen diesen Spezialfall nun mit Hilfe von Potenzreihen lösen, indem wir $f(x)$ anstelle von $x(t)$ schreiben.

Gesucht ist also eine Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, x^k$ mit

$$f''(x) = -f(x) \quad \text{für alle } x \text{ und} \quad f(0) = 0, \;\; f'(0) = 1.$$

Bestimmen Sie sämtliche Koeffizienten a_k der gesuchten Potenzreihe.

Lösung Die erste und zweite Ableitung der Potenzreihe sind gegeben durch

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{l=1}^{\infty} l \cdot a_l \cdot x^{l-1} \overset{(k=l-1)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot a_{k+1} \cdot x^k, \\ f''(x) &= \sum_{l=2}^{\infty} l(l-1) \cdot a_l \cdot x^{l-2} \overset{(k=l-2)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) \cdot a_{k+2} \cdot x^k. \end{aligned}$$

Genau wie bei endlichen Polynomen sind zwei Potenzreihen genau dann gleich, wenn alle ihre Koeffizienten übereinstimmen. Aus $f''(x) = -f(x)$ bzw.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) \cdot a_{k+2} \cdot x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-a_k) \cdot x^k$$

folgt also durch Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 \cdot a_2 &= -a_0 \qquad (k = 0), \\ 3 \cdot 2 \cdot a_3 &= -a_1 \qquad (k = 1), \\ 4 \cdot 3 \cdot a_4 &= -a_2 \qquad (k = 2), \\ &\;\vdots \\ (k+2)(k+1) \cdot a_{k+2} &= -a_k. \end{aligned} \tag{1}$$

Wegen den Anfangsbedingungen gilt weiterhin

$$\begin{aligned} f(0) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 0^k = \underline{a_0 = 0}, \\ f'(0) &= a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \cdot a_{k+1} \cdot 0^k = \underline{a_1 = 1}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Rekursion (1) erhalten wir also für $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
a_{2n} &= 0, \\
a_{2n+1} &= \frac{-a_{2n-1}}{(2n+1)2n} = \frac{+a_{2n-3}}{(2n+1)2n(2n-1)(2n-2)} \\
&= \frac{-a_{2n-5}}{(2n+1)2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)} \\
&= \ldots = \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}.
\end{aligned}$$

Die gesuchte Potenzreihe lautet also

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}.$$

Wir werden später sehen, dass dies der Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$ entspricht. Damit kann man auch leicht eine Kontrollrechnung durchführen:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= (\sin(x))'' = (\cos(x))' = -\sin(x) = -f(x) \quad \checkmark \\
f(0) &= \sin(0) = 0 \quad \checkmark \\
f'(0) &= \cos(0) = 1 \quad \checkmark
\end{aligned}$$