Analysis D-BAUG
Dr. Meike Akveld HS 2015

Serie 10 - Taylorreihen

1. Berechnen Sie die Taylorreihe um $x_0 = 0$ der folgenden Funktionen f.

a) $f(x) = \ln(1+x)$
b) $f(x) = x^2 \ln(1+x^4)$
c) $f(x) = e^{-x}\cos(x)$

Lösung

a) In der Vorlesung haben wir gesehen, dass

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}.$$

Indem wir hier $-x$ einsetzen für x, sehen wir

$$\ln(1+x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}.$$

b) Die Taylorreihe von $\ln(1+x)$ bzgl. des Punkts $x = 0$ lautet

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

Daraus folgt

$$\ln(1+x^4) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{4k+4}}{k+1}.$$

Für $x^2 \ln(1+x^4)$ ergibt sich also die Reihenentwicklung

$$x^2 \ln(1+x^4) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}\, x^{4k+6}.$$

c)

$$\begin{aligned}
e^{-x}\cos(x) &= \mathrm{Re}[e^{-x}e^{ix}] = \mathrm{Re}[e^{(i-1)x}] \\
e^{(i-1)x} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i-1)^k}{k!} x^k \\
\Rightarrow \mathrm{Re}[e^{(i-1)x}] &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Re}[(i-1)^k] \frac{x^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Aus $i - 1 = \sqrt{2} e^{i\frac{3}{4}\pi}$ und $(i-1)^k = \sqrt{2}^k e^{i\frac{3}{4}k\pi}$ folgt, dass

$$\mathrm{Re}[(i-1)^k] = \sqrt{2}^k \cos\left(\frac{3}{4}k\pi\right).$$

Damit erhält man

$$e^{-x}\cos(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k/2}\cos(\frac{3}{4}k\pi)}{k!}\, x^k.$$

2. Berechnen Sie den Wert folgender Ausdrücke:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^3}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\cosh(2x)-1}{1-\cos x}$

c) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+5x^2-1}-x\right)$

Lösung

a) Durch dreimalige Anwendung der Regel von Bernoulli-De L'Hôpital erhalten wir

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cos(x)}{6} = -\frac{1}{6}.$$

Alternativlösung mittels der Taylorreihe des Sinus:

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\
\Rightarrow\ \sin(x) - x &= -\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\
\Rightarrow\ \frac{\sin(x)-x}{x^3} &= -\frac{1}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \frac{x^4}{7!} + \dots \ \to -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6} \ \text{ für } x \to 0.
\end{aligned}$$

b) Durch zweimalige Anwendung der Regel von Bernoulli-De L'Hôpital erhalten wir

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cosh(2x)-1}{1-\cos(x)} \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{2\,\sinh(2x)}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{4\,\cosh(2x)}{\cos(x)} = 4.$$

c)

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+5x^2-1}-x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^3}}-1}{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+5t-t^3}-1}{t},$$

wobei $t = \frac{1}{x}$. Mit Bernoulli-De L'Hôpital erhalten wir

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+5t-t^3}-1}{t} \;=\; \lim_{t\to 0}\frac{5-3t^2}{3(1+5t-t^3)^{2/3}} = \frac{5}{3}.$$

3. Prüfungsaufgabe 2, Winter 2011.

a) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\tan x}$.

b) Bestimmen Sie das vierte Taylorpolynom der Funktion $f(x) = \frac{1}{(1-2x)^2}$ um den Punkt $x_0 = 0$.

Lösung

a) Da sowohl $\arcsin x$ als auch $\tan x$ für $x \to 0$ gegen 0 streben, können wir die Regel von de l'Hôpital anwenden. Wegen $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ und $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$ gilt daher

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1} = 1.$$

b) Das vierte Taylorpolynom von $f(x)$ erhalten wir, indem wir die Taylorreihe von $f(x)$ nach dem Glied vierter Ordnung abschneiden. Wir bestimmen daher zunächst die Taylorreihe von $f(x)$. Wegen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-2x)^{-1} = 2(1-2x)^{-2}$ gilt mit Hilfe der geometrischen Reihe

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{(1-2x)^2} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-2x}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(2x)^k\right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^k x^k\right] = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} 2^k k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} k x^{k-1} \\ &\overset{\ell=k-1}{=} \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^\ell (\ell+1) x^\ell = 1 + 4x + 12x^2 + 32x^3 + 80x^4 + \cdots . \end{aligned}$$

Durch Abschneiden der Taylorreihe nach dem Glied vierter Ordnung erhalten wir also das Taylorpolynom

$$T_4(x) = 1 + 4x + 12x^2 + 32x^3 + 80x^4.$$

Alternativ können wir auch den Ansatz

$$T_4(x) = f(0) + f'(0)x + \tfrac{1}{2!}f''(0)x^2 + \tfrac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \tfrac{1}{4!}f^{(4)}(0)x^4$$

benutzen. Dazu benötigen wir die Ableitungen von f:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-2x)^{-2} && \Rightarrow & f(0) &= 1, \\ f'(x) &= 4 \cdot (1-2x)^{-3} && \Rightarrow & f'(0) &= 4, \\ f''(x) &= 4 \cdot 6 \cdot (1-2x)^{-4} && \Rightarrow & \tfrac{1}{2!}f''(0) &= 12, \\ f'''(x) &= 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot (1-2x)^{-5} && \Rightarrow & \tfrac{1}{3!}f'''(0) &= 32, \\ f^{(4)}(x) &= 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot (1-2x)^{-6} && \Rightarrow & \tfrac{1}{4!}f^{(4)}(0) &= 80. \end{aligned}$$

Einsetzen in den obigen Ansatz liefert dann das gesuchte Taylorpolynom.

4. Approximieren Sie folgende Ausdrücke für x nahe 0 durch ihr zweites Taylorpolynom. *Skizzieren* Sie die Funktion aus Teilaufgabe a) zusammen mit ihren Taylorpolynomen nullter, erster und zweiter Ordnung im Intervall $\left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$.

a)

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

b)

$$\frac{1}{\cos x}$$

Lösung

a) Das nullte, erste bzw. zweite Taylorpolynom einer Funktion f im Punkt a ist gegeben durch

$$\begin{aligned} T_0(x) &= f(a), \quad \text{(konstant)} \\ T_1(x) &= f(a) + f'(a)(x-a), \quad \text{(Tangente)} \\ T_2(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2. \end{aligned}$$

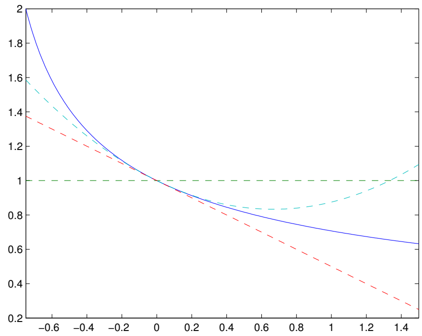
$f(x) := \frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$, $a = 0$. Dann ist $f(0) = 1$ und weiter

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = -\frac{1}{2}, \\ f''(x) &= \frac{3}{4}(1+x)^{-\frac{5}{2}} \quad \Rightarrow \quad f''(0) = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$T_2(x) = 1 - \frac{1}{2}\,x + \frac{3}{8}\,x^2.$$

Die durchgehende Linie (blau) in Abbildung ist die Funktion $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$, die gestrichelten Linien sind die Taylorpolynome nullter (grün), erster (rot) bzw. zweiter (türkis) Ordnung. Man erkennt, dass die Taylorpolynome in der Umgebung des Punktes $x = 0$ durchaus eine gute Näherung darstellen, sich zum Rande des Intervalls hin jedoch deutlich von der Funktion entfernen. Je höher die Ordnung des Taylorpolynoms, desto besser ist die lokale Approximation.



b) $f(x) = \frac{1}{\cos x}$, $x_0 = 0$. Es gilt $f(0) = 1$ und ausserdem

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sin x}{\cos^2 x} && \Rightarrow \quad f'(0) = 0, \\ f''(x) &= \frac{\cos^3 x + 2\sin^2 x \cos x}{\cos^4 x} && \Rightarrow \quad f''(0) = 1. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich als zweites Taylorpolynom

$$T_2(x) = 1 + \frac{1}{2}\, x^2.$$