Analysis D-BAUG
Dr. Meike Akveld HS 2015

Serie 11 - Integralrechnung

1. Repetition. Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\int (x^3 + 4x - 5)\,\mathrm{d}x$ **Lösung**
Wie wir wissen, gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^k = kx^{k-1}$, für alle $k \in \mathbb{R}$. Daraus folgt

$$\int x^k\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}x^{k+1} + C,$$

dabei ist C eine Konstante. Somit folgt

$$\int (x^3 + 4x - 5)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 + 2x^2 - 5x + C.$$

b) $\int e^{-4x}\,\mathrm{d}x$ **Lösung**
Es gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{ax} = ae^{ax}$, für alle $a \in \mathbb{R}$. Somit ergibt sich $\int e^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}e^{ax} + C$ und damit

$$\int e^{-4x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}e^{-4x} + C.$$

c) $\int \sqrt{3x}\,\mathrm{d}x$ **Lösung**
Wir gehen vor wie in Teilaufgabe a) und erhalten

$$\int \sqrt{3x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{3}\int x^{1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{2\sqrt{3}}{3}x^{3/2} + C.$$

d) $\int \cos(5x-2)\,\mathrm{d}x$ **Lösung**
Aus $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x) = \cos(x)$ folgt auch (Kettenregel)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(5x-2) = 5\cos(5x-2),$$

also

$$\int \cos(5x-2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\sin(5x-2) + C.$$

e) $\int \cosh(5x-2)\,\mathrm{d}x$ **Lösung**
Aus $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh(x) = \cosh(x)$ folgt auch (Kettenregel)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh(5x-2) = 5\cosh(5x-2),$$

also

$$\int \cosh(5x-2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\sinh(5x-2) + C.$$

f) $\int (2x-5)^{-3/2}\,\mathrm{d}x$ **Lösung**
Wir gehen vor wie in Teilaufgabe a) und berücksichtigen die Kettenregel. Es gilt also

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x-5)^{-1/2} = -\frac{1}{2}(2x-5)^{-3/2}\cdot 2 = -(2x-5)^{-3/2},$$

damit folgt auch

$$\int (2x-5)^{-3/2}\,\mathrm{d}x = -(2x-5)^{-1/2} + C.$$

g) $\int_1^5 \frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x$ **Lösung**
Für $x>0$ gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x) = \frac{1}{x}$, mit der Kettenregel gilt also für $x>-3$, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x+3) = \frac{1}{x+3}.$$

Daraus folgt

$$\int_1^5 \frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x = [\ln(x+3)+C]_{x=1}^5 = \ln(8)-\ln(4) = \ln(8/4) = \ln(2).$$

h) $\int_9^{65} \frac{1}{3x-3}\,\mathrm{d}x$**Lösung**
$WieinTeilaufgabeg)giltfr$ x$>$1 ,$dass\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(3x-3) = \frac{3}{3x-3}$.Daraus folgt

$$\begin{aligned}\int_9^{65} \frac{1}{3x-3}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{3}\ln(3x-3)+C\right]_{x=9}^{65} = \tfrac{1}{3}(\ln(192)-\ln(24))\\ &= \tfrac{1}{3}\ln(192/24) = \tfrac{1}{3}\ln(8) = \ln\left(8^{\frac{1}{3}}\right) = \ln(2).\end{aligned}$$

2. Abbildung 1 zeigt die Graphen der beiden Funktionen

$$f(x) = 4x^3+2x^2-5x-2 \qquad \text{und} \qquad g(x) = 2x^2-x-2.$$

a) Bestimmen Sie die Stellen $x_1 < x_2 < x_3$, an denen sich die Graphen der beiden Funktionen schneiden. **Lösung**
Um die Schnittpunkte der beiden Graphen zu bestimmen, müssen wir die Gleichung $f(x) = g(x)$ lösen:

$$\begin{aligned} & 4x^3+2x^2-5x-2 = 2x^2-x-2\\ \Leftrightarrow\quad & 4x^3-4x = 0\\ \Leftrightarrow\quad & x(x^2-1) = 0\\ \Leftrightarrow\quad & x(x-1)(x+1) = 0.\end{aligned}$$

Die gesuchten Stellen lauten also $x_1=-1$, $x_2=0$ und $x_3=1$.

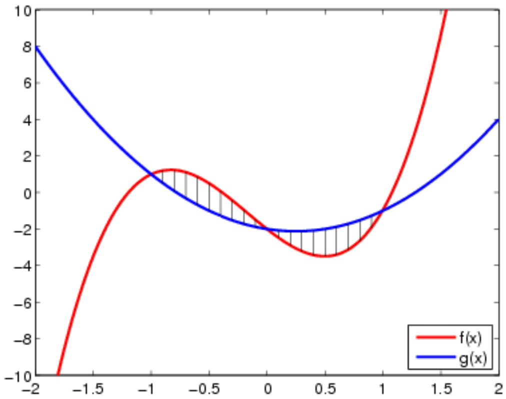


Abbildung 1: Die beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ aus Aufgabe 2

b) Berechnen Sie das Integral $\int_{x_1}^{x_3} \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x$. **Lösung**

$$\int_{x_1}^{x_3} \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (4x^3 - 4x)\,\mathrm{d}x = \big[x^4 - 2x^2\big]_{-1}^{1} = -1 - (-1) = 0$$

Interpretation des Ergebnisses: Die beiden schraffierten Flächen (siehe Skizze) sind gleich gross. Im Gegensatz zur linken Fläche steuert die rechte allerdings einen *negativen* Wert zum Integral bei, da der Graph von f zwischen x_2 und x_3 unterhalb des Graphen von g verläuft. Das gesamte Integral ist deswegen gleich Null.

c) Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Fläche. **Lösung**
Der Inhalt der schraffierten Fläche ist gegeben durch

$$\int_{x_1}^{x_3} |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Wichtig sind hierbei die Betragsstriche. Da der Graph von f zwischen x_1 und x_2 oberhalb des Graphen von g verläuft, zwischen x_2 und x_3 jedoch unterhalb, können wir die Betragsstriche durch eine Zerlegung des Integrationsintervalls auflösen:

$$\begin{aligned}
\int_{x_1}^{x_3} |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x &= \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{x_2}^{x_3} |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x + \int_{x_2}^{x_3} \big(g(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{0} (4x^3 - 4x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} (4x - 4x^3)\,\mathrm{d}x \\
&= \big[x^4 - 2x^2\big]_{-1}^{0} + \big[2x^2 - x^4\big]_{0}^{1} = 0 - (-1) + 1 - 0 = 2.
\end{aligned}$$

Der Inhalt der schraffierten Fläche beträgt also 2.

3. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ durch eine konstante Funktion zu approximieren. Eine Variante ist die konstante Taylorapproximation (in einem bestimmten Punkt). Wir wollen nun eine Alternative anschauen. Die Funktion f wird hier auf dem Bereich $a \leq x \leq b$ durch eine konstante Funktion f_0 so approximiert, dass das Integral

$$\int_a^b (f(x) - f_0)^2 \mathrm{d}x$$

minimal wird. Leiten Sie eine Formel für f_0 her. **Lösung**
Die Funktion f_0 finden wir indem wir ein Minimum der Funktion

$$F(t) = \int_a^b (f(x) - t)^2 \mathrm{d}x$$

suchen. Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_a^b (f(x) - t)^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (f(x) - t)^2 \mathrm{d}x \\
&\overset{Kettenregel}{=} \int_a^b 2(t - f(x)) \mathrm{d}x \\
&= 2t(b - a) - 2 \int_a^b f(x) \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

und folglich gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(t_0) = 0 \Leftrightarrow t_0 = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \mathrm{d}x$. Da $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} F(t) = 2(b-a) > 0$ handelt es sich hierbei um ein Minimum. Wir erhalten also

$$f_0 = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) \mathrm{d}x.$$

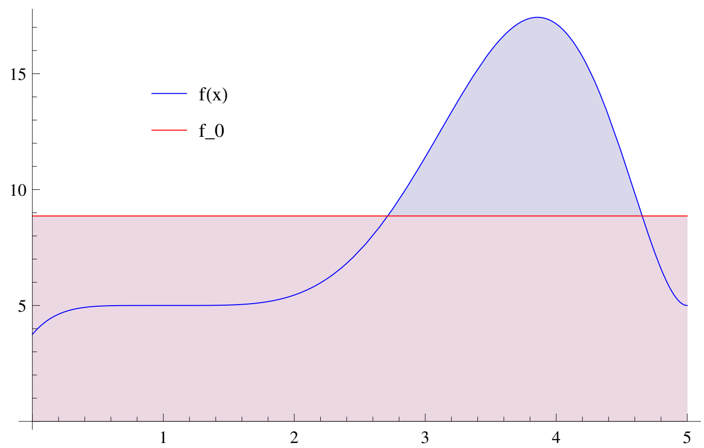


Abbildung 2: Die Funktionen $f(x)$ und f_0 schliessen dieselbe Fläche ein.

4. a) Skizzieren Sie die Funktion $f_1 : [0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f_1(x) = \frac{1}{k} \quad \text{für } x \in [k-1, k).$$

Was ist der Zusammenhang zwischen der harmonischen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ und dem Integral $\int_0^\infty f_1(x)\,\mathrm{d}x$? Begründen Sie Ihre Antwort! **Lösung**

Die Funktion f_1 (siehe durchgehende Linien in Abbildung 1) ist eine Treppenfunktion. Auf den Intervallen $[0,1)$, $[1,2)$, $[2,3)$, usw. ist sie gemäss Definition jeweils konstant. Um ihren Wert zu erhalten, können wir sie also (z.B.) in den jeweiligen Intervallmittelpunkten $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, usw. auswerten.

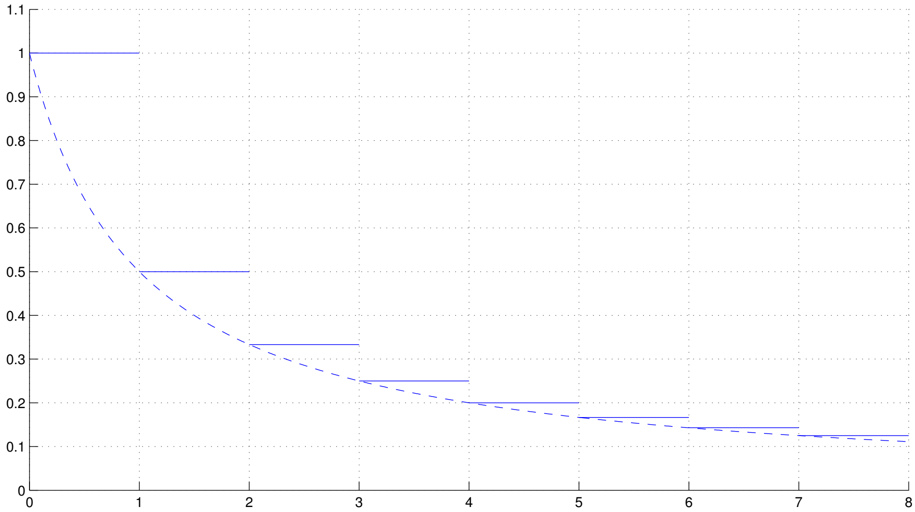


Abbildung 3: f_1 (durchgehend) und g (gestrichelt)

Konkret: Auf dem Intervall $[k-1, k)$ hat die Funktion den Wert $f_1(k - \frac{1}{2}) = \frac{1}{k}$.
Alle Intervalle $[k-1, k)$ haben die gleiche Länge $k - (k-1) = 1$.
Deswegen ergibt sich für das Integral

$$\int_0^\infty f_1(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} f_1\left(k - \frac{1}{2}\right) \cdot (k - (k-1)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Das Integral und die harmonische Reihe sind also identisch.

b) Zeigen Sie die **Divergenz** der harmonischen Reihe, indem Sie eine Funktion $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $0 \le g(x) \le f_1(x)$ finden, so dass

$$\int_0^\infty g(x)\,\mathrm{d}x = \infty.$$

Lösung

Mit $g(x) := \frac{1}{x+1}$ gilt (siehe gestrichelte Linie obiger Abbildung)

$$0 \le g(x) \le f_1(x). \tag{1}$$

Wegen Teilaufgabe a) und Ungleichung (1) folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} &\overset{a)}{=} \int_0^{\infty} f_1(x)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{(1)}{\geq} \int_0^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\infty} \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{a\to\infty} \big[\ln|x+1|\big]_0^a = \infty - 0 = \infty.
\end{aligned}$$

Damit ist die Divergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ gezeigt.

c) Für die Funktion $f_2 : [0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f_2(x) = \frac{1}{k^2} \quad \text{für } x \in [k-1, k),$$

gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \int_0^{\infty} f_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ **konvergiert**, indem Sie eine Funktion $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $h(x) \geq f_2(x)$ finden, so dass

$$\int_0^{\infty} h(x)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Lösung

Mit

$$h(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in [0,1], \\ x^{-2}, & \text{falls } x \in (1,\infty) \end{cases}$$

gilt $h(x) \geq f_2(x)$. Somit ergibt sich weiter

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} &= \int_0^{\infty} f_2(x)\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_0^{\infty} h(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{1} 1\,\mathrm{d}x + \int_1^{\infty} x^{-2}\,\mathrm{d}x \\
&= 1 + \lim_{a\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^a \\
&= 1 + (0 - (-1)) = 2.
\end{aligned}$$

Daraus folgt also $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2 < \infty$ (Konvergenz!).

d) Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ mit $\alpha > 1$? Begründen Sie Ihre Antwort! **Lösung**

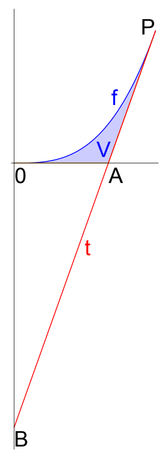
Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ konvergiert für alle $\alpha > 1$. Um das zu sehen, kann der gleiche Gedankengang wie oben benutzt werden. Definiere

$$h_\alpha(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in [0,1], \\ x^{-\alpha}, & \text{falls } x \in (1,\infty), \end{cases}$$

dann ergibt sich wieder

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} &\leq \int_0^\infty h_\alpha(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 1\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x \\ &= 1 + \lim_{a\to\infty} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^a \\ &\overset{(\alpha>1)}{=} 1 + \left(0 - \frac{1}{1-\alpha}\right) = 1 + \frac{1}{\alpha-1} < \infty. \end{aligned}$$

5. Für $n > 1$ betrachten wir die Funktion $f(x) = x^n$. Für einen beliebigen Punkt P auf dem Graphen sei t die Tangente in P. Des weiteren bezeichnen A und B die Schnittpunkte von t mit der x- bzw. y-Achse und V die von der Funktion f, der Tangente t und der x-Achse eingeschlossene Fläche (siehe Abbildung).



Zeigen Sie, dass

$$\frac{V}{\Delta(0AB)} = \frac{1}{n^2-1}$$

gilt, wobei $\Delta(0AB)$ die Fläche des Dreiecks $0AB$ bezeichnet. **Lösung**
Der Punkt P hat die Koordinaten (p, p^n) und die Ableitung ist

$$f'(p) = np^{n-1}.$$

Folgich ist die Tangente gegeben durch

$$t: \quad y = np^{n-1}(x-p) + p^n = np^{n-1}x + (1-n)p^n.$$

Im Punkt A gilt $np^{n-1}x + (1-n)p^n = 0$, bzw. $x = \frac{n-1}{n}p$, also

$$A = \left(\tfrac{n-1}{n}p, 0\right)$$

und B hat die Koordinaten

$$B = (0, (1-n)p^n)\,.$$

Wir erhalten

$$\Delta(0AB) = \frac{\frac{n-1}{n}p \cdot (n-1)p^n}{2} = \frac{(n-1)^2}{2n} \cdot p^{n+1}.$$

Sei $P' = (p, 0)$ die Projektion von P auf die x-Achse. Dann ist die Fläche V gegeben durch

$$\begin{aligned} V &= \int_0^p x^n \, \mathrm{d}x - \tfrac{1}{2}\overline{AP'} \cdot \overline{P'P} \\ &= \frac{p^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{2}\left(p - \frac{n-1}{n}p\right) p^n \\ &= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n}\right) \cdot p^{n+1} \\ &= \frac{n-1}{2n(n+1)} \cdot p^{n+1}. \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\frac{V}{\Delta(0AB)} = \frac{\frac{n-1}{2n(n+1)} \cdot p^{n+1}}{\frac{(n-1)^2}{2n} \cdot p^{n+1}} = \frac{1}{n^2-1}.$$

6. Bestimmung des Zuwachses der Konsumentenrente auf Grund von einem zweiten Tunnel durch die Alpen.

Ihre Firma hat den Auftrag bekommen, eine Kosten-Nutzen-Analyse für einen zweiten Gotthardtunnel durchzuführen. Ihre Aufgabe ist es, eine realistische Schätzung für den Netto-Nutzen eines zweiten Tunnels für die Konsumenten anzugeben. Dafür muss man die Fläche zwischen einer geschätzten Nachfragekurve und den jeweiligen Staukosten (siehe Abbildung 4) für die beiden Szenarien (ein Tunnel versus zwei Tunnel) bestimmen. Die Staukosten funktionieren wie ein Preis für die Benutzung des Tunnels.

Verwenden Sie für die folgenden Aufgaben ein Computeralgebrasystem Ihrer Wahl.

a) **Nachfrage:** Beobachtungen über mehrere Jahre haben folgende Daten über die Nachfrage (gemessen in DTV = Daily Traffic Volume) als Funktion der Staukosten ergeben - siehe Abbildung 5.
Eine Trendlinie ist gegeben durch die folgende Formel

$$\text{Nachfrage} = \frac{10'000'000}{\text{Fahrkosten}} - 9'000 \tag{2}$$

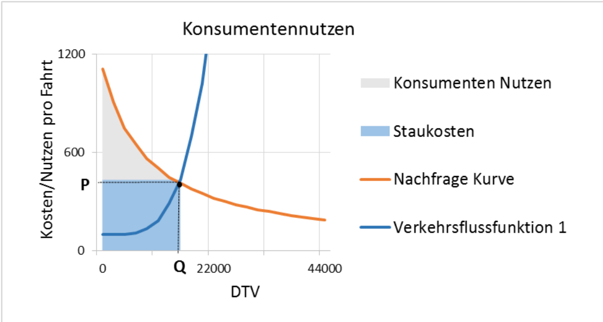


Abbildung 4: Konsumentennutzen

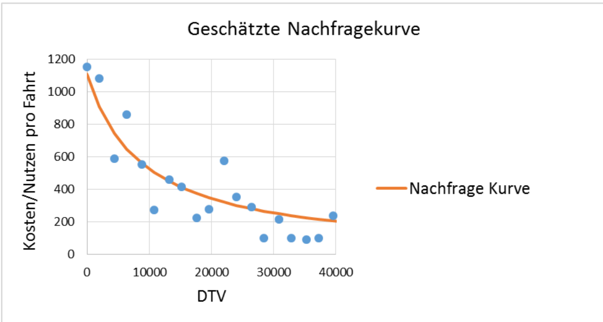


Abbildung 5: Geschätze Nachfragekurve

oder in der üblichen Form für eine Nachfragekurve

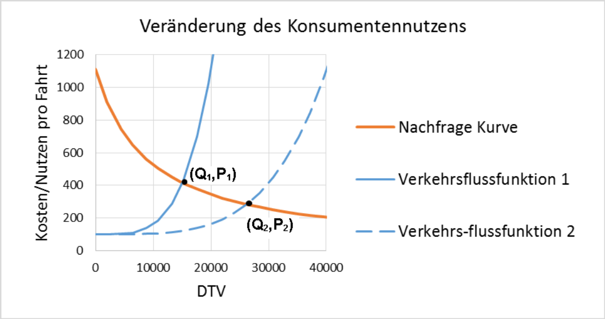
$$\text{Fahrtkosten} = \frac{10'000'000}{\text{Nachfrage} + 9'000} \tag{3}$$

Angebot: Normalerweise stellt eine Angebotskurve die verschiedenen Mengen dar, die ein Produzent zu verschiedenem Preisen zu liefern bereit ist. Im Falle eines Tunnels ist die Situation etwas anders. Der Tunnel kann von einer unterschiedlichen Anzahl Nutzern gleichzeitig befahren werden, wobei eine grössere Anzahl an Nutzern zu grösseren Staukosten pro Fahrzeug führt. Das Endresultat ist aber dasselbe: eine monoton steigende Kurve, die das Verhältnis zwischen einer Anzahl und den dazu gehörenden Kosten (hier P) angibt. Sie haben sich für das folgenden vereinfachten Verkehrsflussmodell entschieden

$$\text{Staukosten} = 100 \cdot \left(1 + 0.15 \left(\frac{\text{Nachfrage}}{\text{Kapazitt}}\right)^4\right) \tag{4}$$

wobei die Kapazität für einen Tunnel 7'000 ist und für zwei 14'000.

Skizzieren Sie die Kurven, die durch die Gleichungen (2) und (3) definiert sind (für zwei Szenarien), in einem Koordinatensystem (horizontal DVT, vertikal die Kosten pro Fahrt). **Lösung**
Die Kurven sehen folgendermassen aus:



b) **Gleichgewichtspreis:** Der Schnittpunkt einer Angebots- und einer Nachfragekurve nennt man den Gleichgewichtspunkt.

Bestimmen Sie für beide Szenarien die Gleichgewichtsnachfrage ($Q_{\text{Gleichgewicht}}$) und den Gleichgewichtspreis ($P_{\text{Gleichgewicht}}$). **Lösung**
Im Gleichgewichtspunkt gilt

$$\text{Fahrtkosten} = \text{Staukosten}$$
$$\frac{10'000'000}{\text{Nachfrage} + 9'000} = 100 \cdot \left(1 + 0.15\left(\frac{\text{Nachfrage}}{\text{Kapazitt}}\right)^4\right)$$

mit $\text{Kapazitt}_1 = 7'000, \text{Kapazitt}_2 = 14'000$. Wir erhalten

$$(Q_1, P_1) \approx (15'000, 420),$$
$$(Q_2, P_2) \approx (26'000, 280).$$

c) **Konsumentenrente:** Üblicherweise definiert man die Konsumentenrente als die Fläche zwischen der Nachfragekurve und der horizontalen Gerade, die durch $P = P_{\text{Gleichgewicht}}$ gegeben ist, über dem Interval $[0, Q_{\text{Gleichgewicht}}]$.

Bestimmen Sie für beide Szenarien die Konsumentenrente und berechnen Sie die Differenz. Fazit? **Lösung**

$$\begin{aligned}\text{Konsumentenrente}_1 &= \int_0^{Q_1} \frac{10'000'000}{\text{Nachfrage} + 9'000}\, \text{dNachfrage} - P_1 \cdot Q_1 \\ &\approx 9'800'000 - 6'300'000 \approx 3'600'000, \\ \text{Konsumentenrente}_2 &= \int_0^{Q_2} \frac{10'000'000}{\text{Nachfrage} + 9'000}\, \text{dNachfrage} - P_2 \cdot Q_2 \\ &\approx 13'600'000 - 7'400'000 \approx 6'200'000.\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\text{Konsumentenrente}_2 - \text{Konsumentenrente}_1 \approx 2'600'000.$$

Die Konsumentenrente ist also bei doppelter Kapazität um

$$\frac{\text{Konsumentenrente}_2 - \text{Konsumentenrente}_1}{\text{Konsumentenrente}_2} \approx 74\%$$

höher.