Analysis D-BAUG
Dr. Meike Akveld HS 2015

Serie 12 - Integrationstechniken

1. Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\displaystyle\int e^{2x} \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x$

Lösung
Wir integrieren zwei Mal partiell, bis wir auf der rechten Seite wieder das Integral der linken Seite (mit anderem Faktor) finden:

$$\begin{aligned}
I &= \int \overset{\downarrow}{e^{2x}} \overset{\uparrow}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \sin(x)e^{2x} - 2\int \overset{\downarrow}{e^{2x}} \overset{\uparrow}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \sin(x)e^{2x} + 2e^{2x}\cos(x) - 4\int e^{2x}\cos(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sin(x)e^{2x} + 2e^{2x}\cos(x) - 4I
\end{aligned}$$

Daher gilt

$$\int e^{2x}\cos(x)\,\mathrm{d}x = I = \frac{1}{5}(e^{2x}\sin(x) + 2e^{2x}\cos(x)) + C.$$

b) $\displaystyle\int_0^1 t^2 \cdot \cosh(2t)\,\mathrm{d}t$

Lösung
Wir integrieren partiell, bis wir anstatt eines Polynoms nur noch einen konstanten Faktor im Integral haben.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \overset{\downarrow}{t^2} \cdot \overset{\uparrow}{\cosh(2t)}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{2}\sinh(2t)t^2\right]_0^1 - \int_0^1 \sinh(2t)t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\sinh(2) - \left(\frac{1}{2}\left[\cosh(2t)t\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \cosh(2t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{2}\sinh(2) - \left(\frac{1}{2}\cosh(2) - \left[\frac{1}{4}\sinh(2t)\right]_0^1\right) \\
&= \frac{1}{2}\sinh(2) - \frac{1}{2}\cosh(2) + \frac{1}{4}\sinh(2) \\
&= \frac{1}{4}(3\sinh(2) - 2\cosh(2)) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}(e^2 - e^{-2}) - e^2 - e^{-2}\right) \\
&= \frac{1}{8}(e^2 - 5e^{-2}).
\end{aligned}$$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)\,\mathrm{d}x$

Lösung

Mit $y = \sin(x) \Rightarrow \mathrm{d}y = \cos(x)\,\mathrm{d}x$ folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)(1-\sin^2(x))\,\mathrm{d}x \\
&= [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\sin^2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 1 - \int_0^1 y^2\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

d) $\displaystyle\int_{99}^{100} \sqrt{x^5 - 99x^4}\,\mathrm{d}x$

Lösung

Den Ausdruck $\sqrt{x^5-99x^4}$ schreiben wir als $x^2\sqrt{x-99}$ um. Dann ergibt zwei mal partielle Integration

$$\begin{aligned}
&\int_{99}^{100} x^2\sqrt{x-99}\,\mathrm{d}x \\
=\ & \left[x^2 \cdot \frac{2}{3}(x-99)^{\frac{3}{2}}\right]_{99}^{100} - \int_{99}^{100} 2x \cdot \frac{2}{3}(x-99)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x \\
=\ & \frac{2}{3}\cdot 100^2 - \frac{4}{3}\int_{99}^{100} x\cdot(x-99)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x \\
=\ & \frac{2}{3}\cdot 100^2 - \frac{4}{3}\left(\left[\frac{2}{5}x\cdot(x-99)^{\frac{5}{2}}\right]_{99}^{100} - \int_{99}^{100}\frac{2}{5}(x-99)^{\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x\right) \\
=\ & \frac{2}{3}\cdot 100^2 - \frac{4}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot 100 + \frac{4}{3}\left[\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{7}\cdot(x-99)^{\frac{7}{2}}\right]_{99}^{100} \\
=\ & \frac{2}{3}\cdot 100^2 - \frac{8}{15}\cdot 100 + \frac{16}{105} = \frac{231472}{35}.
\end{aligned}$$

e) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{8\ln\left(\frac{1}{\tan x}\right)}{\sin x\cos x}\,\mathrm{d}x$

Lösung

Setze $u = \ln\left(\frac{1}{\tan x}\right)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{\frac{1}{\tan x}} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) \\
&= \tan x \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) \\
&= \frac{\sin x}{\cos x}\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) \\
&= -\frac{1}{\sin x \cos x}
\end{aligned}$$

und folglich $\mathrm{d}x = -\sin x \cos x \,\mathrm{d}u$. Wir erhalten also

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{8\ln(\frac{1}{\tan x})}{\sin x \cos x}\,\mathrm{d}x &= -8\int_{\ln(\frac{1}{\sqrt{3}})}^{0} u\,\mathrm{d}u \\
&= -8\left[\frac{u^2}{2}\right]_{-\ln(\sqrt{3})}^{0} \\
&= 4\left[u^2\right]_{0}^{-\ln(\sqrt{3})} \\
&= 4\ln^2(\sqrt{3}) = \ln^2(3).
\end{aligned}$$

f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t(e^t + \frac{1}{t}e^t)}{e + te^t}\,\mathrm{d}t$

Lösung

$$\int_0^1 \frac{t(e^t + \frac{1}{t}e^t)}{e + te^t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{te^t + e^t}{e + te^t}\,\mathrm{d}t$$

Setze $u = e + te^t$.

Dann: $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = te^t + e^t$ und folglich $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{te^t + e^t}\,\mathrm{d}u$ und

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{te^t + e^t}{e + te^t}\,\mathrm{d}t &= \int_e^{2e} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \\
&= \big[\ln|u|\big]_e^{2e} \\
&= \ln 2e - \ln e = \ln 2.
\end{aligned}$$

g) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x$, für $n, m \in \mathbb{N}$

Lösung

Mit partieller Integration:

Wir erhalten

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\overset{\downarrow}{nx})\sin(\overset{\uparrow}{mx})\ \mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\left[-\frac{1}{m}\sin(nx)\cos(mx)\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0\,(2\pi-\text{periodisch})} + \frac{n}{m}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\overset{\downarrow}{nx})\cos(\overset{\uparrow}{mx})\ \mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\left[\frac{n}{m^2}\cos(nx)\sin(mx)\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0\,(2\pi-\text{periodisch})} + \frac{n^2}{m^2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{n^2}{m^2}\cdot I.
\end{aligned}
$$

Für $n \neq m$ muss $I = 0$ gelten, da wir sonst einen Widerspruch zu obiger Rechnung finden. Genauer folgt das aus der Gleichung

$$\underbrace{\left(1 - \frac{n^2}{m^2}\right)}_{\neq 0} I = 0.$$

Für $n = m$ ergibt sich in der obigen partiellen Integration nach dem ersten Schritt

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\,\mathrm{d}x$$

und rufen wir uns die bekannte Identität

$$\sin^2(nx) + \cos^2(nx) = 1$$

in Erinnerung, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos^2(nx))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} 1\,\mathrm{d}x - \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\pi - I,
\end{aligned}
$$

also $I = \pi$.

Mit den Additionstheoremen:

Wegen dem Additionstheorem

$$2\sin(nx)\sin(mx) = \cos\left((m-n)x\right) - \cos\left((m+n)x\right)$$

berechnen wir

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left((m-n)x\right) \mathrm{d}x &= \begin{cases} 2\pi, & n = m \\ 0, & n \neq m, \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos\left((m+n)x\right) \mathrm{d}x &= 0\end{aligned}$$

und daher gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\, \mathrm{d}x = \begin{cases} \pi, & n = m \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

h) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x^3-3}{x^{11}}}\, \mathrm{d}x$

Lösung

$$\int \sqrt{\frac{x^3-3}{x^{11}}}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{9}\int \frac{9}{x^4}\sqrt{1-\frac{3}{x^3}}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1-\frac{3}{x^3}\right)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{27}\left(\frac{x^3-3}{x^3}\right)^{\frac{3}{2}} + C.$$

2. Ziel dieser Aufgabe ist es, eine Rekursionsformel für das Integral

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x \tag{1}$$

zu finden.

a) Berechnen Sie die ersten zwei Integrale I_0 und I_1.

Lösung

Wir rechnen

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, \\ I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 + 1 = 1. \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \mathrm{d}x$ mit Hilfe von partieller Integration.

Lösung

Durch partielle Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\overset{\uparrow}{\sin} x) \cdot (\overset{\downarrow}{\sin} x)\, \mathrm{d}x \\ &= [(-\cos x)\cdot(\sin x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)\cdot(\cos x) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Nun verwenden wir die Beziehung $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ und erhalten

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \sin^2 x \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - I_2.$$

Durch auflösen der Gleichung nach I_2 folgt

$$I_2 = \frac{\pi}{4}.$$

c) Finden Sie eine allgemeine Formel für I_n.
Lösung
Wir verfahren gleich wie oben.

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\overset{\uparrow}{\sin} x) \cdot (\overset{\downarrow}{\sin^{n-1}} x) \, \mathrm{d}x \\
&= \left[(-\cos x) \cdot (\sin^{n-1} x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) \cdot ((n-1) \sin^{n-2} x \cdot \cos x) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} x \cdot (1 - \sin^2 x) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} \mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^n x \mathrm{d}x = (n-1) \cdot I_{n-2} - (n-1) \cdot I_n.
\end{aligned}$$

Folglich gilt

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}.$$

d) Verwenden Sie die Rekursionsformel um I_7 zu berechnen.
Lösung

$$I_7 = \frac{6}{7} \cdot I_5 = \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot I_3 = \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot I_1 = \frac{16}{35}.$$

3. Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

a) **Prüfungsaufgabe 4c), Sommer 2012.**

$$\int \frac{3x^2 - 7x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} \, \mathrm{d}x$$

Lösung
Variante 1:

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2-7x-2}{x^3-x^2-2x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{3x^2-2x-2}{x^3-x^2-2x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{5x}{x^3-x^2-2x}\,\mathrm{d}x \\ &= \ln(|x^3-x^2-2x|) - 5\int \frac{1}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x\ .\end{aligned}$$

Die Partialbruchzerlegung $\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}=\frac{1}{x^2-x-2}$ liefert (linke Seite auf gemeinsamen Nenner bringen, Koeffizientenvergleich) das Gleichungssystem

$$\begin{cases} A+B &= 0\ , \\ -2A+B &= 1\ . \end{cases}$$

Daraus ergibt sich $A=\frac{-1}{3}$ und $B=\frac{1}{3}$.
Somit folgt

$$\begin{aligned}&\int \frac{3x^2-7x-2}{x^3-x^2-2x}\,\mathrm{d}x \\ =\ & \ln(|x^3-x^2-2x|) - 5\left[\frac{1}{3}\int\frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x\right] \\ =\ & \ln(|x^3-x^2-2x|) - \frac{5}{3}\ln(|x-2|) + \frac{5}{3}\ln(|x+1|) + C\ .\end{aligned}$$

Variante 2:

Die Partialbruchzerlegung setzen wir an als

$$\frac{3x^2-7x-2}{x^3-x^2-2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}\ .$$

Bringen wir die rechte Seite auf den gemeinsamen Nenner, so ergibt sich

$$\begin{aligned}&\frac{A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2)}{x^3-x^2-2x} \\ =\ & \frac{(A+B+C)x^2+(-A+B-2C)x-2A}{x^3-x^2-2x}\end{aligned}$$

und ein Koeffizientenvergleich liefert das Gleichungssystem

$$\begin{cases} A+B+C &= 3\ , \\ -A+B-2C &= -7\ , \\ -2A &= -2\ . \end{cases}$$

Aus der dritten Gleichung folgt sofort, dass $A=1$. Das System reduziert sich zu

$$\begin{cases} B+C &= 2\ , \\ B-2C &= -6\ , \end{cases}$$

was $B=2-C$ impliziert. Somit folgt $2-C-2C=-6$ und damit $C=\frac{8}{3}, B=\frac{-2}{3}$.

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2-7x-2}{x^3-x^2-2x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \frac{2}{3}\int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x + \frac{8}{3}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \ln(|x|) - \frac{2}{3}\ln(|x-2|) + \frac{8}{3}\ln(|x+1|) + C\ .\end{aligned}$$

Bemerkung: Variante 1 und 2 ergeben das gleiche Resultat!

$$\begin{aligned} & \ln(|x^3-x^2-2x|) - \frac{5}{3}\ln(|x-2|) + \frac{5}{3}\ln(|x+1|) + C \\ = \ & \ln(|x|\cdot|x-2|\cdot|x+1|) - \frac{5}{3}\ln(|x-2|) + \frac{5}{3}\ln(|x+1|) + C \\ = \ & \ln(|x|) + \ln(|x-2|) + \ln(|x+1|) - \frac{5}{3}\ln(|x-2|) + \frac{5}{3}\ln(|x+1|) + C \\ = \ & \ln(|x|) - \frac{2}{3}\ln(|x-2|) + \frac{8}{3}\ln(|x+1|) + C\ .\end{aligned}$$

b) **Prüfungsaufgabe 4c), Winter 2012.**

$$\int \frac{x^2+6}{x^3-7x^2+18x-12}\,\mathrm{d}x$$

Lösung

Wir führen zunächst eine Partialbruchzerlegung des Integranden durch. Dazu finden wir durch Raten, dass $x_1 = 1$ eine Nullstelle des Nennerpolynoms ist. Polynomdivision liefert dann

$$x^3-7x^2+18x-12 = (x-1)(x^2-6x+12).$$

Das Restpolynom $x^2-6x+12$ kann nicht weiter zerlegt werden, da seine Diskriminante negativ ist. Daher machen wir den Ansatz

$$\frac{x^2+6}{(x-1)(x^2-6x+12)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-6x+12}.$$

Nach Multiplikation mit dem Hauptnenner wird das zu

$$\begin{aligned} x^2+6 &= A(x^2-6x+12) + (Bx+C)(x-1) \\ &= (A+B)x^2 + (-6A-B+C)x + (12A-C)\end{aligned}$$

und wir finden durch Koeffizientenvergleich

$$\left\{\begin{aligned} A+B &= 1\ , \\ -6A-B+C &= 0\ , \\ 12A-C &= 6\ , \end{aligned}\right.$$

was auf $A = 1, B = 0, C = 6$ führt. Damit gilt

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+6}{x^3-7x^2+18x-12}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{6}{x^2-6x+12}\,\mathrm{d}x \\ &= \ln|x-1| + \int \frac{2}{\frac{1}{3}(x-3)^2+1}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Das verbleibende Integral auf der rechten Seite lösen wir mittels der Substitution $\frac{1}{3}(x-3)^2 = u^2$. Dann gilt $\mathrm{d}x = \sqrt{3}\,\mathrm{d}u$ und

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{\frac{1}{3}(x-3)^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2\sqrt{3}}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = 2\sqrt{3}\arctan u + C \\ &= 2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{x-3}{\sqrt{3}}\right) + C.\end{aligned}$$

Somit erhalten wir insgesamt

$$\int \frac{x^2+6}{x^3-7x^2+18x-12}\,\mathrm{d}x = \ln|x-1| + 2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{x-3}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

4. Beweisen Sie:
Jede Stammfunktion einer stetigen, ungeraden Funktion $f\colon [-a,a] \to \mathbb{R}$ ist gerade.

Lösung
Es sei f eine stetige, ungerade Funktion, d.h. $f(-x) = -f(x)$, mit Stammfunktion F. Nach dem Fundamentalsatz der Analysis ist die Funktion F gegeben durch

$$F(x) = F(0) + \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Im folgenden führen wir die Substitution $y = -z$ mit $\mathrm{d}y = -\mathrm{d}z$ durch. Es gilt

$$F(-x) = F(0) + \int_0^{-x} f(y)\,\mathrm{d}y = F(0) - \int_0^x f(-z)\,\mathrm{d}z = F(0) + \int_0^x f(z)\,\mathrm{d}z = F(x),$$

d.h. F ist eine gerade Funktion.

5. Die Krümmung κ des Graphen einer Funktion f ist gegeben durch

$$\kappa(x) = \frac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{2}$$

Wie gross ist die durchschnittliche Krümmung der Funktion $f(x) = e^x$ im Bereich von 0 bis 1?

Lösung
Die durchschnittliche Krümmung erhalten wir durch

$$\bar{\kappa}(x) = \int_0^1 \kappa(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x.$$

Substituiere $u = f'(x)$. Dann gilt $\mathrm{d}u = f''(x)\mathrm{d}x$ und

$$\bar{\kappa}(x) = \int_{f'(0)}^{f'(1)} \frac{1}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u.$$

Wir rechnen

$$\begin{aligned}\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)' &= \frac{\sqrt{1+u^2} - u \cdot \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \cdot u}{\sqrt{1+u^2}^2} \\ &= \frac{1+u^2-u^2}{\sqrt{1+u^2}^3} = \frac{1}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

Folglich ist $\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}\bar{\kappa}(x) &= \int_{f'(0)}^{f'(1)} \frac{1}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u \\ &= \left[\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right]_{f'(0)}^{f'(1)} = \frac{f'(1)}{\sqrt{1+f'(1)^2}} - \frac{f'(0)}{\sqrt{1+f'(0)^2}}.\end{aligned}$$

Die durchschnittliche Krümmung einer Funktion f hängt folglich nur von der ersten Ableitung im Anfangs- und Endpunkt ab. Für $f(x) = e^x$ erhalten wir also

$$\bar{\kappa}(x) = \frac{e}{\sqrt{1+e^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} = \frac{e}{\sqrt{1+e^2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$