Analysis D-BAUG
Dr. Meike Akveld HS 2015

Serie 13 - Anwendungen der Integralrechnung I

1. Für die Hyperbel mit der Gleichung $x^2 - y^2 = 1$ (siehe Abbildung) betrachten wir die Parametrisierung

$$r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie den Inhalt der grau markierten Fläche in Abbildung 1, welche von der x-Achse, der Hyperbel und dem Leitstrahl vom Ursprung zum Punkt $r(T)$ begrenzt wird.

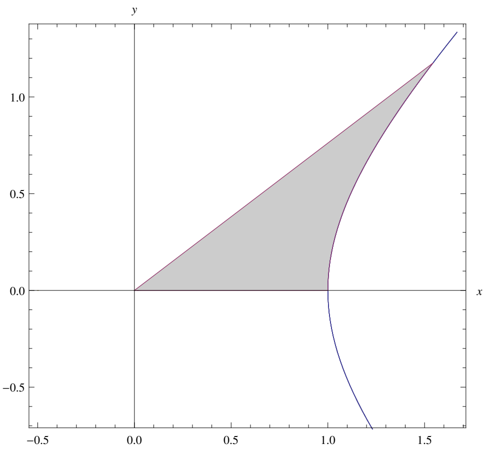

Figure 1: Die gesuchte Fläche ist grau hinterlegt.

Lösung
Wir verwenden die Formel zur Flächenberechnung aus der Vorlesung

$$F = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \big(x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Der Schnittpunkt der Hyperbel mit der x-Achse entspricht gerade dem Parameterwert $t = 0$. Daher wählen wir die Integrationsgrenzen $t_1 = 0$ und $t_2 = T$. Darüber hinaus benötigen wir noch die Ableitungen der Parametrisierung

$$\dot{x}(t) = \sinh t,$$
$$\dot{y}(t) = \cosh t.$$

Damit erhalten wir

$$F = \frac{1}{2} \int_0^T (\cosh t \cosh t - \sinh t \sinh t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_0^T 1\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2}\right]_0^T = \frac{T}{2}.$$

b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Inhalt dieser Fläche und dem Parameter T?

Lösung

Die vom Leitstrahl zwischen dem Koordiantenursprung und dem Punkt $r(t)$ für $t \in [0, T]$ überstrichene Fläche ist proportional zu T. Der Proportionalitätsfaktor beträgt $\frac{1}{2}$.

Bemerkung: Aufgrund dieses Zusammenhangs zwischen dem Parameter T und der vom Leitstrahl überstrichenen Fläche werden die Umkehrfunktionen von sinh und cosh auch als Area-Funktionen bezeichnet. Im Gegensatz dazu besteht beim Einheitskreis mit der Parametrisierung $r(t) = (\cos t, \sin t)$ eine Proportionalität zwischen dem Parameter T und der zurückgelegten Bogenlänge auf der Kreisperipherie. Deswegen sind die Umkehrfunktionen von sin und cos auch als Arcus-Funktionen bekannt.

2. a) Berechnen Sie die Länge der Kurve, welche parametrisiert ist durch

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t}\cos(5t) \\ \mathrm{e}^{-t}\sin(5t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Die Kurve ist in der Abbildung auf der linken Seite skizziert.

Lösung

Die zur Berechnung der Kurvenlänge benötigten Ableitungen lauten

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\mathrm{e}^{-t}\cos(5t) - 5\mathrm{e}^{-t}\sin(5t), \\ \dot{y}(t) &= -\mathrm{e}^{-t}\sin(5t) + 5\mathrm{e}^{-t}\cos(5t). \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 &= \mathrm{e}^{-2t}\cos^2(5t) + 10\mathrm{e}^{-2t}\cos(5t)\sin(5t) + 25\mathrm{e}^{-2t}\sin^2(5t) \\ &+ \mathrm{e}^{-2t}\sin^2(5t) - 10\mathrm{e}^{-2t}\cos(5t)\sin(5t) + 25\mathrm{e}^{-2t}\cos^2(5t) \\ &= \mathrm{e}^{-2t} + 25\mathrm{e}^{-2t} = 26\mathrm{e}^{-2t} \\ &\Rightarrow \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} = \sqrt{26}\,\mathrm{e}^{-t}. \end{aligned}$$

Damit können wir nun die gesuchte Kurvenlänge berechnen als

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,\mathrm{d}t &= \sqrt{26}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \sqrt{26}\cdot\left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{2\pi} \\ &= \sqrt{26}\left(-\mathrm{e}^{-2\pi} + 1\right) \approx 5.089497. \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie die Länge der Kurve, welche der Gleichung

$$y^2 = 1 - |x|$$

genügt. Die Kurve ist in der Abbildung auf der rechten Seite dargestellt.

Lösung

Da die gegebene Kurve symmetrisch bzgl. der y-Achse ist, genügt es die Länge (z.B.) des rechten Teilstücks zu berechnen und das Ergebnis anschliessend zu verdoppeln. Der rechte Teil der Kurve kann wie folgt als parametrisierte Kurve dargestellt werden:

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - t^2 \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in [-1, 1].$$

Damit ergeben sich die benötigten Ableitungen zu

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -2t, \\ \dot{y}(t) &= 1. \end{aligned}$$

Damit ist $\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} = \sqrt{4t^2 + 1}$. Für die Gesamtlänge ergibt sich also

$$2 \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, \mathrm{d}t = 2 \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{4t^2 + 1}\, \mathrm{d}t.$$

Zur Berechnung des Integrals führen wir die Substitution $u = 2t$ aus. Dann gilt $\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u$ und die Integrationsgrenzen werden zu -2 bzw. 2. Wir erhalten

$$2 \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{4\,t^2 + 1}\, \mathrm{d}t = \int_{-2}^{2} \sqrt{u^2 + 1}\, \mathrm{d}u.$$

Das Integral, welches jetzt auf der rechten Seite steht, kennen wir bereits aus der Vorlesung. Wir können es durch eine weitere Substitution lösen. Diesmal setzen wir $u = \sinh x$. Dann ist $\mathrm{d}u = \cosh x\, \mathrm{d}x$ und die Integrationsgrenzen werden zu $\operatorname{arsinh}(-2)$ bzw. $\operatorname{arsinh}(2)$. Es folgt

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2} \sqrt{u^2 + 1}\, \mathrm{d}u &= \int_{\operatorname{arsinh}(-2)}^{\operatorname{arsinh}(2)} \sqrt{\sinh^2 x + 1} \cdot \cosh x\, \mathrm{d}x \\ &= \int_{\operatorname{arsinh}(-2)}^{\operatorname{arsinh}(2)} \sqrt{\cosh^2 x} \cdot \cosh x\, \mathrm{d}x \\ &= \int_{\operatorname{arsinh}(-2)}^{\operatorname{arsinh}(2)} \cosh^2 x\, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Mit $\sinh x$ ist auch $\operatorname{arsinh} x$ ungerade und mit $\cosh x$ ist auch $\cosh^2 x$ gerade. Damit folgt

$$\int_{\operatorname{arsinh}(-2)}^{\operatorname{arsinh}(2)} \cosh^2 x\, \mathrm{d}x = \int_{-\operatorname{arsinh}(2)}^{\operatorname{arsinh}(2)} \cosh^2 x\, \mathrm{d}x = 2 \cdot \int_{0}^{\operatorname{arsinh}(2)} \cosh^2 x\, \mathrm{d}x.$$

Mit partieller Integration rechnen wir

$$\begin{aligned} & \int_{0}^{\operatorname{arsinh}(2)} \cosh^2 x\, \mathrm{d}x \\ = \; & \int_{0}^{\operatorname{arsinh}(2)} (1 + \sinh^2 x)\, \mathrm{d}x \\ = \; & [x]_0^{\operatorname{arsinh}(2)} + [\sinh x \cdot \cosh x]_0^{\operatorname{arsinh}(2)} - \int_{0}^{\operatorname{arsinh}(2)} \cosh^2 x\, \mathrm{d}x \\ = \; & \operatorname{arsinh}(2) + 2 \cosh(\operatorname{arsinh}(2)) - \int_{0}^{\operatorname{arsinh}(2)} \cosh^2 x\, \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

also ergibt sich, wenn wir nach dem gesuchten Integral auflösen,

$$\int_0^{\operatorname{arsinh}(2)} \cosh^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\operatorname{arsinh}(2) + 2\cosh(\operatorname{arsinh}(2))).$$

Somit folgt

$$2 \cdot \int_0^{\operatorname{arsinh}(2)} \cosh^2 x \,\mathrm{d}x = \operatorname{arsinh}(2) + 2\cosh(\operatorname{arsinh}(2)) \approx 5.91577.$$

c) Welche Länge besitzt die Kurve aus Teilaufgabe a), wenn man $t \in [0, 2\pi]$ durch $t \in [0, \infty)$ ersetzt?

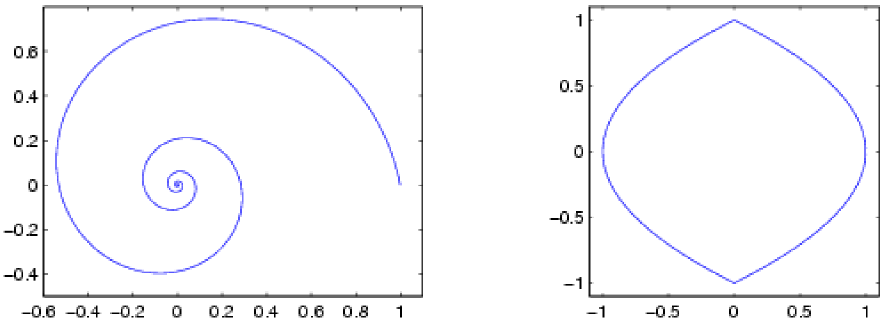

Figure 2: Die Kurven aus Teilaufgabe a) (links) und b) (rechts).

Lösung
Welche Länge besitzt die Kurve aus Teilaufgabe a), wenn man $t \in [0, 2\pi]$ durch $t \in [0, \infty)$ ersetzt?
In diesem Fall muss ein uneigentliches Integral berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,\mathrm{d}t &= \lim_{T\to\infty} \int_0^T \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{26} \cdot \lim_{T\to\infty} \int_0^T \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{26} \cdot \lim_{T\to\infty} \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^T \\
&= \sqrt{26} \cdot \lim_{T\to\infty} \left(1 - \mathrm{e}^{-T}\right) = \sqrt{26} \approx 5.09902.
\end{aligned}$$

Beobachtung: Ein Vergleich mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe a) zeigt, dass der zusätzliche Beitrag zur Länge der Kurve, welcher vom Intervall $t \in (2\pi, \infty)$ herrührt, sehr klein ist.

3. Berechnen Sie die Oberfläche und das Volumen einer Kugel mit Radius 1, aus der ein zylinderförmiges Loch mit Radius $a < 1$ symmetrisch zum Mittelpunkt herausgebohrt wurde.

Figure 3: Querschnitt der durchbohrten Kugel

Lösung

Bevor wir uns an die Berechnung von Oberfl"ache und Volumen der durchbohrten Kugel machen, ist es hilfreich, sich Gedanken "uber die H"ohe H des zylinderf"ormigen Lochs zu machen. Da die Kugel Radius 1 hat, ist mit Hilfe von Abbildung 3 sowie des Satzes von Pythagoras klar, dass

$$\left(\frac{H}{2}\right)^2 + a^2 = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad H = 2\sqrt{1-a^2}$$

gelten muss. Mit den Achsenbezeichnungen in Abbildung 3 l"asst sich der rechte Bogen des Querschnitts durch

$$x = \sqrt{1-y^2}, \qquad -\frac{H}{2} \leq y \leq \frac{H}{2}$$

beschreiben. Im Dreidimensionalen ergibt sich die "aussere Oberfl"ache der durchbohrten Kugel folglich durch Rotieren der Funktion

$$f : \left[-\frac{H}{2}, \frac{H}{2}\right] \to \mathbb{R}, \qquad f(y) = \sqrt{1-y^2}$$

um die y-Achse.

Volumenberechnung:

Indem wir das Volumen des Rotationsk"orpers, der durch Rotieren von f um die y-Achse entsteht, berechnen und davon das Volumen V_Z des zylinderförmigen Lochs abziehen, bekommen wir das Volumen der durchbohrten Kugel:

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} f^2(y)\,\mathrm{d}y - V_Z \\
&\overset{\text{(Sym.)}}{=} 2\pi \int_0^{\frac{H}{2}} (1-y^2)\,\mathrm{d}y - H\pi a^2 \\
&= 2\pi \left[y - \frac{y^3}{3}\right]_0^{\frac{H}{2}} - H\pi a^2 \\
&= 2\pi\frac{H}{2} - 2\pi\frac{H^3}{24} - H\pi a^2 \\
&= (1-a^2)\pi H - \frac{\pi}{12}H^3 \\
&= 2\pi(1-a^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{12}\pi(1-a^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\pi(1-a^2)^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

Oberfl"achenberechnung:

Der Graph der Funktion f (siehe oben) kann in Parameterdarstellung folgendermassen beschrieben werden:

$$t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sqrt{1-t^2} \\ t \end{pmatrix}, \qquad -\frac{H}{2} \leq t \leq \frac{H}{2}.$$

Die gesuchte Oberfläche ergibt sich dann als Oberfläche des Rotationskörpers zuz"uglich der Oberfl"ache O_Z der zylinderf"ormigen Innenwand:

$$\begin{aligned} O &= 2\pi \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} x(t)\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}\,\mathrm{d}t + O_Z \\ &= 2\pi \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sqrt{1-t^2}\sqrt{\frac{t^2}{1-t^2}+1}\,\mathrm{d}t + 2\pi a H \\ &= 2\pi \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} 1\,\mathrm{d}t + 2\pi a H \\ &= 2\pi H + 2\pi a H = 2\pi H(1+a) \\ &= 4\pi(1+a)(1-a^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

4. Approximieren Sie das folgende Integral:

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

Lösung
Wegen

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

kann man $\frac{\sin x}{x}$ folgendermassen als Reihe schreiben:

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

Indem man die einzelnen Summanden der Reihe integriert, erhält man

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 1\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^2}{3!}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^4}{5!}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^6}{7!}\,\mathrm{d}x + \dots \\ &= [x]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3\cdot 3!}\right]_0^1 + \left[\frac{x^5}{5\cdot 5!}\right]_0^1 - \left[\frac{x^7}{7\cdot 7!}\right]_0^1 + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \frac{1}{7\cdot 7!} + \dots \end{aligned}$$

Für eine Näherung auf drei Nachkommastellen genügen im vorliegenden Fall die ersten drei Summanden und es folgt

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x \approx 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} = 0.946.$$