Serie 14 - Anwendungen der Integralrechnung II

1. Ein Kreisel werde erzeugt durch Rotieren der Funktion

$$f(x) = x^{\frac{3}{5}}, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

um die y-Achse. Die Massenverteilung innerhalb des Kreisels sei beschrieben durch die Dichte

$$\rho(y) = 2 - y, \qquad 0 \leq y \leq 1.$$

a) Berechnen Sie die Gesamtmasse des Kreisels.

Lösung

Die Funktion f ist auf dem Intervall $[0, 1]$ eineindeutig. Ihre Umkehrfunktion ist gegeben durch

$$f^{-1}(y) = y^{\frac{5}{3}}, \qquad 0 = f(0) \leq y \leq f(1) = 1.$$

Schneidet man aus dem Kreisel eine infinitesimal dünne Scheibe von der Dicke dy heraus (siehe Abbildung 1), so hat diese die Masse

$$\mathrm{d}m = \rho(y)\pi(f^{-1}(y))^2\,\mathrm{d}y.$$

Die Gesamtmasse M ergibt sich durch Integration über die Höhe des Kreisels:

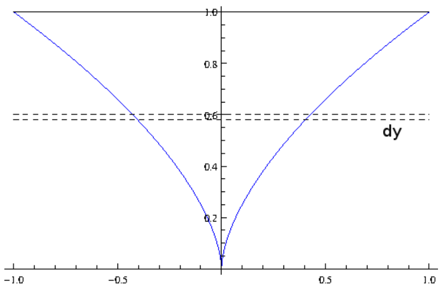


Figure 1: Kreisel (Querschnitt)

$$\begin{aligned} M &= \int_{y=f(0)}^{y=f(1)} \mathrm{d}m = \pi \int_0^1 (f^{-1}(y))^2 \rho(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \pi \int_0^1 \left(2y^{\frac{10}{3}} - y^{\frac{13}{3}}\right)\,\mathrm{d}y \\ &= \pi\left(2 \cdot \frac{3}{13} - \frac{3}{16}\right) = \frac{57}{208}\pi. \end{aligned}$$

b) Auf welcher H"ohe liegt der Schwerpunkt?

Lösung

Aus Symmetriegründen muss der Schwerpunkt auf der y-Achse liegen. Seine Berechnung reduziert sich also auf die Bestimmung der y-Komponente y_S. F"ur die H"ohe y_S des Schwerpunktes ist folgende Gleichung erf"ullt:

$$y_S M = \int_{y=0}^{y=1} y \, \mathrm{d}m.$$

Damit k"onnen wir y_S folgendermassen berechnen:

$$\begin{aligned} y_S &= \frac{\pi}{M} \int_0^1 y(f^{-1}(y))^2 \rho(y) \, \mathrm{d}y \\ &= \frac{\pi}{M} \int_0^1 \left(2y^{\frac{13}{3}} - y^{\frac{16}{3}} \right) \, \mathrm{d}y \\ &= \frac{\pi}{M} \left(2 \cdot \frac{3}{16} - \frac{3}{19} \right) = \frac{286}{361} \approx 0.792. \end{aligned}$$

2. Berechnen Sie das Trägheitsmoment einer Türe bezüglich der Türangel. Die Türe ist $m = 40$ kg schwer und hat die Masse $h \times b \times d = 210$ cm $\times$ 80 cm $\times$ 2.5 cm.

Lösung

Für das Trägheitsmoment aller Punkte im Abstand x zur Türangel gilt

$$\mathrm{d}\Theta(x) = x^2 \rho d h \mathrm{d}x, \tag{1}$$

wobei ρ die Dichte der Türe bezeichnen.

Somit gilt

$$\Theta = \int_0^b \mathrm{d}\Theta(x) = \rho d h \int_0^b x^2 \mathrm{d}x = \rho d h \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^b = \tfrac{1}{3} \rho d h b^3 = \tfrac{1}{3} m b^2.$$

Für die gegebenen Grössen folgt also

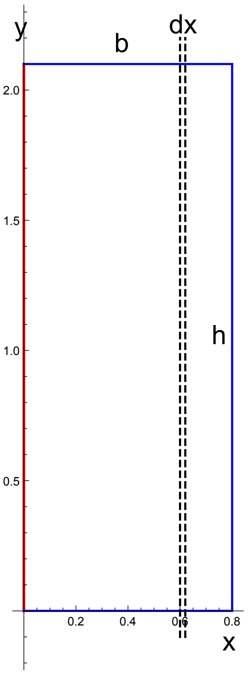
$$\Theta = \tfrac{1}{3} \, (40 \text{ kg}) \cdot (0.8 \text{ m})^2 = 8.53 \text{ kg m}^2.$$

Bemerkung: Hier brauchen wir für die Berechnung des Trägheitsmoment nur die Masse und die Breite der Türe.

3. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment einer homogenen Vollkugel mit Masse m und Radius R um einen Durchmesser.

Lösung

Wir berechnen das Trägheitsmoment einer Kugel mit Zentrum im Ursprung bezüglich der y-Achse.



In der Vorlesung wurde das Trägheitsmoment eines Vollzylinders mit Radius r, Höhe h und Dichte ρ um die Rotationssymmetrieachse berechnet:

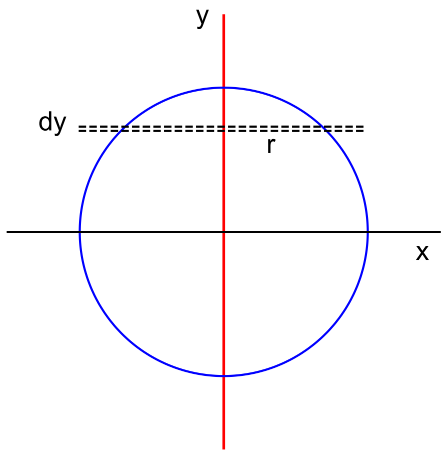
$$\Theta_Z = \pi h \rho \frac{r^4}{2}. \tag{2}$$

Für eine dünne Scheibe der Dicke dy mit Radius $r = \sqrt{R^2 - y^2}$ auf der Höhe y gilt folglich

$$\mathrm{d}\Theta(y) = \pi\rho \frac{\sqrt{R^2 - y^2}^4}{2} \mathrm{d}y. \tag{3}$$

Damit erhalten wir das gesuchte Trägheitsmoment durch

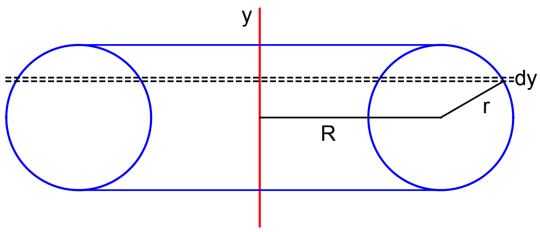
$$\begin{aligned}
\Theta &= \int_{-R}^{R} \pi\rho \frac{(R^2 - y^2)^2}{2} \mathrm{d}y \\
&= \pi\rho \int_0^R (R^4 - 2R^2 y^2 + y^4) \mathrm{d}y \\
&= \pi\rho \left[R^4 y - 2R^2 \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right]_0^R \\
&= \pi\rho (R^5 - \frac{2}{3} R^5 + \frac{1}{5} R^5) \\
&= \pi\rho \frac{8}{15} R^5 = \frac{2}{5} m R^2,
\end{aligned}$$



mit $m = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$.

4. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment eines homogenen Volltorus um seine Rotationssymmetrieachse.

Lösung
Wir betrachen einen Torus mit Radius R und Dicke $2r$ (Siehe Skizze).



Definiere Koordinaten, so dass die Rotationsachse der y-Achse entspricht. Wir betrachten zuerst eine dünne Scheibe des Torus auf der Höhe y. Diese entspricht einem Vollzylinder mit zylinderförmigem Loch. Das Trgheitsmoment davon lässt sich daher als Differenz dieser beiden Trägheitsmomenten berechnen. Anhand der Formel für das Trägheitsmoment eines Zylinders (siehe Vorlesung), erhalten wir folglich ein Trägheitsmoment der Grösse

$$\mathrm{d}\Theta(y) = \frac{1}{2}\pi\rho((R + \sqrt{r^2 - y^2})^4 - (R - \sqrt{r^2 - y^2})^4)\mathrm{d}y. \tag{4}$$

Somit gilt

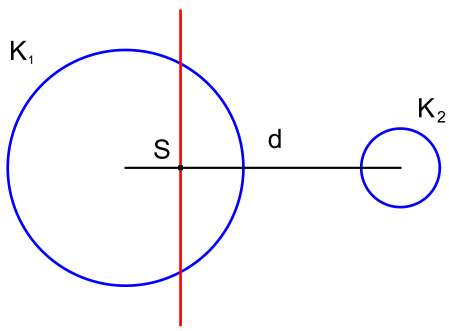
$$\begin{aligned}\Theta &= \frac{1}{2}\pi\rho \int_{-r}^{r} ((R + \sqrt{r^2 - y^2})^4 - (R - \sqrt{r^2 - y^2})^4)\mathrm{d}y \\ &= \pi\rho \int_{0}^{r} (8R^3\sqrt{r^2 - y^2} + 8R\sqrt{r^2 - y^2}^3)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Wir substituieren $y = r\sin\phi$ und erhalten mit $\mathrm{d}y = r\cos\phi\mathrm{d}\phi$

$$\begin{aligned}
\Theta &= 8\pi\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} (R^3r^2\cos^2\phi + Rr^4\cos^4\phi)\mathrm{d}\phi \\
&= 8\pi\rho \left(R^3r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\phi\mathrm{d}\phi + Rr^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\phi\mathrm{d}\phi \right) \\
&= 8\pi\rho \left(R^3r^2 \left(\frac{\pi}{4}\right) + Rr^4 \left(\frac{3\pi}{16}\right) \right) \\
&= 2\pi^2 Rr^2\rho \left(R^2 + \tfrac{3}{4}r^2\right) \\
&= m\left(R^2 + \tfrac{3}{4}r^2\right),
\end{aligned}$$

wobei $m = 2\pi^2 Rr^2\rho$ der Masse des Torus entspricht.

5. Gegeben seien zwei Kugeln K_1 und K_2 mit Radius $r_1 = 0.3$ m und $r_2 = 0.1$ m. Die beiden Kugeln haben die Massen $m_1 = 4$ kg, beziehungsweise $m_2 = 1$ kg und sind durch einen dünnen Stab miteinander verbunden, so dass die beiden Kugelmittelpunkte einen Abstand von $d = 0.7$ m vorweisen. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment bezüglich einer Achse durch den Schwerpunkt, die senkrecht zum Stab liegt.



Lösung
Zuerst berechnen wir die Abstände d_i von den Kugelmittelpunkten zum Schwerpunkt. Es gilt

$$d_1 m_1 = d_2 m_2 \quad \text{und} \quad d_1 + d_2 = d \tag{5}$$

und folglich $d_1 = \frac{1}{5} \cdot 0.7$ m und $d_2 = \frac{4}{5} \cdot 0.7$ m. Das Trägheitsmoment erhalten wir nun als Summe der beiden Trägheitsmomenten der Kugeln. Wir kennen bereits das Trägheitsmoment einer Kugel bezüglich einer Achse durch den Mittelpunkt. Mit Hilfe des Satzes von Steiner erhalten wir somit

$$\Theta_i = \tfrac{2}{5} m_i r_i^2 + m_i d_i^2. \tag{6}$$

Wir fassen zusammen

$$\begin{aligned}\Theta &= \Theta_1 + \Theta_2 \\ &= \tfrac{2}{5} m_1 r_1^2 + m_1 d_1^2 + \tfrac{2}{5} m_2 r_2^2 + m_2 d_2^2 \\ &= \tfrac{2}{5} \cdot 4\ \mathrm{kg} \cdot (0.3\ \mathrm{m})^2 + 4\ \mathrm{kg} \cdot \left(\tfrac{1}{5} \cdot 0.7\ \mathrm{m}\right)^2 + \tfrac{2}{5} \cdot 1\ \mathrm{kg} \cdot (0.1\ \mathrm{m})^2 + 1\ \mathrm{kg} \cdot \left(\tfrac{4}{5} \cdot 0.7\ \mathrm{m}\right)^2 \\ &= 0.54\ \mathrm{kg\ m}^2.\end{aligned}$$