

Serie 3 - Komplexe Zahlen II

1. Wir betrachten die komplexe Gleichung

$$z^6 = -4\sqrt{3} - 4i.$$

- Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ dieser Gleichung.
 - Zeichnen Sie die Lösungen in die komplexe Zahlenebene ein.
 - Welche der eingezeichneten Lösungen ist die Zahl $\sqrt[6]{-4\sqrt{3} - 4i}$?
2. Es sei z_1 eine Lösung der folgenden Gleichung. Bestimmen Sie die reellen Koeffizienten p und q sowie die weiteren Lösungen!

$$3z^3 - 12z^2 + pz + q = 0, \quad z_1 = 3 + i.$$

3. **Prüfungsaufgabe 1, Sommer 2014.** Es sei das Gebiet

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \operatorname{Im} \left(\frac{z+2}{iz} \right) > 0 \right\}$$

gegeben.

- Skizzieren Sie das Gebiet B in der komplexen Ebene.
 - Das Polynom $z^3 + \frac{7}{2}z^2 + 7z + 6$ hat eine komplexe Nullstelle mit Realteil gleich -1 . Bestimmen Sie alle Nullstellen dieses Polynoms in Normal- und in Polarform.
 - Welche dieser Nullstellen befinden sich in B ?
4. Rechnen Sie nach, dass die folgende Beziehung gilt:

$$\sin(5\varphi) = 5 \cos^4(\varphi) \sin(\varphi) - 10 \cos^2(\varphi) \sin^3(\varphi) + \sin^5(\varphi).$$