Analysis D-BAUG
Dr. Meike Akveld HS 2015

Serie 4 - Folgen und Reihen

1. Untersuchen Sie die nachstehenden Zahlenfolgen. Sind sie beschränkt? Sind sie monoton? Konvergieren sie, und falls ja, wie lautet ihr Grenzwert?

a) $a_n = \cos \frac{\pi n}{3}$
b) $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} + \frac{n}{n^2}$
c) $a_n = \frac{3n^4 - 5n^2 + 2}{7n^4 - 4n^3}$
d) $a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$ für $n \geq 3$
e) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
f) $a_n = \sqrt{(n+1)n} - n$

2. a) Sei $a_n = a_1 + (n-1)d$ mit $a_1 \in \mathbb{R}$ eine arithmetische Folge reeller Zahlen. Finden Sie eine explizite Formel für die n-te Partialsumme $\sum_{i=1}^{n} a_i$ einer arithmetischen Reihe.

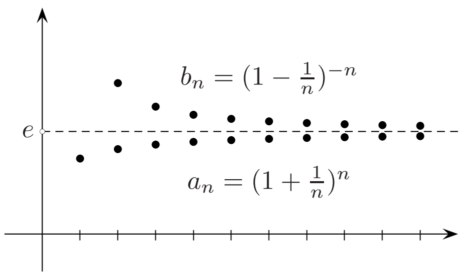
b) Sei $a_n = a_1 q^{n-1}$ mit $a_1 \in \mathbb{R}$ eine geometrische Folge reeller Zahlen mit $|q| < 1$. Zeigen Sie: $\{a_n\}$ konvergiert gegen 0.

3. *(Die Eulersche Zahl)* Wir definieren zwei Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ durch

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

und

$$b_n := \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$



Ziel dieser Aufgabe ist zu zeigen, dass diese beiden Folgen gegen denselben Grenzwert konvergieren. Dieser wird in der Vorlesung e, die *Eulersche Zahl*, genannt werden.

a) Zeigen Sie

$$b_{n+1} = a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

b) Zeigen Sie mit der Ungleichung von Bernoulli (siehe Serie 2, Aufgabe 1), dass

$$\frac{a_n}{b_n} \geq 1 - \frac{1}{n}$$

und folgern Sie, dass die Folge $\{a_n\}$ monoton wächst.

c) Zeigen Sie auf ähnliche Weise, dass $\{b_n\}$ monoton fällt.

d) Folgern Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

4. Untersuchen Sie die Konvergenz folgender Reihen:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3k+5}}{3^k}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+2^k}{k+3^k}$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-\sqrt{k}}{(k+\sqrt{k})^2}$

e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k^{-1}+7)\,\cos(k\pi)}{\sqrt{k}+\pi}$