Serie 6 - Funktionen II + Differentialrechnung

1. a) Sei

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1, & \text{falls } x < 0, \\ cx + d, & \text{falls } 0 \leq x \leq 1, \\ \sqrt{x+8}, & \text{falls } x > 1. \end{cases}$$

Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{R}$, so dass f überall stetig ist.

b) Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-b^2}{x-b}, & \text{falls } x \neq b, \\ 0, & \text{falls } x = b. \end{cases}$$

i. Existiert $g(b)$?
ii. Existiert der Grenzwert $\lim_{x\to b} g(x)$?
iii. Ist $g(x)$ stetig im Punkt $x = b$?

2. *(Zwischenwertsatz)*

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\sin x = 1 - \frac{\sin x}{\cos x}$$

eine Lösung in $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ hat.

b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f\colon [a, b] \to [a, b]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt hat.

c) **Challenge.** Es sei $f\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = f(2)$. Zeigen Sie: $\exists c \in [0, 1]$ mit $f(c) = f(c + 1)$.

3. *(Mittelwertsatz)*

a) Leiten Sie den Mittelwertsatz aus dem Satz von Rolle her:

Mittelwertsatz. Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf (a, b) differenzierbar ist. Dann existiert ein $c \in (a, b)$ mit

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

b) Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf (a, b) differenzierbar ist. Beweisen Sie:

$$\forall x \in (a, b) : f'(x) = 0 \Rightarrow f \text{ konstant}$$

c) Seien $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, die auf (a, b) differenzierbar sind. Beweisen Sie:

$$\forall x \in (a, b) : f'(x) = g'(x) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \text{ s.d. } \forall x \in [a, b] : f(x) = g(x) + c$$

4. Repetition. Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x \sin x$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2+3}$

c) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

d) $f(x) = e^{-x}$

e) $f(x) = (\tan x)^2$

f) $f(x) = \sqrt{\ln x}$

g) $f(x) = \tan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

h) $f(x) = \sqrt{x^2 + \sqrt{x^2+1}}$

5. Bestimmen Sie die Werte der Konstanten a und b so, dass

$$f(x) = ax^2 + bx$$

im Punkt $(1, 2)$ ein globales Maximum hat.

6. Skizzieren Sie den Graphen einer zweimal differenzierbaren Funktion $y = f(x)$, die folgende Eigenschaften besitzt:

x	y	Ableitungen
$x < 2$		$y' < 0, y'' > 0$
$x = 2$	1	$y' = 0, y'' > 0$
$2 < x < 4$		$y' > 0, y'' > 0$
$x = 4$	4	$y' > 0, y'' = 0$
$4 < x < 6$		$y' > 0, y'' < 0$
$x = 6$	7	$y' = 0, y'' < 0$
$x > 6$		$y' < 0, y'' < 0$

Markieren Sie nach Möglichkeiten bestimmte Punkte in ihrem Koordinatensystem und identifizieren Sie die Intervalle, auf denen die Funktion monoton, konvex oder konkav ist.