Analysis D-BAUG
Dr. Meike Akveld HS 2015

Serie 7 - Hyperbelfunktionen Newton-Verfahren

1. *(Areakosinus Hyperbolicus)*

a) Berechnen Sie die Umkehrfunktion des Kosinus Hyperbolicus

$$\cosh\colon [0,\infty] \to [1,\infty)\colon x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

b) Bestimmen Sie die Ableitung von arcosh direkt und mit der Kettenregel.

2. Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1 + \tanh x}{1 + \tanh^2 x}.$$

a) Berechnen Sie

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x).$$

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist f streng monoton fallend?

c) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von f auf dem oben gefundenen Gebiet.

3. *(Newton-Verfahren)*

a) Wir wollen mit Hilfe des Newton-Verfahren den numerischen Wert für $\sqrt{2}$ als Nullstelle von $f(x) = x^2 - 2$ bestimmen. Finden Sie die Rekursionsformel für x_n und berechnen Sie die ersten drei Werte mit dem Startwert $x_0 = 1$.

b) Stellen Sie das Newton-Verfahren für $f(x) = x^3 - 2x + 2$ und Startwert $x_0 = 0$ auf und berechnen Sie die ersten drei Iterationsschritte. Was geht hier schief?

c) Das Newtonverfahren setzt voraus, dass die gegebene Funktion f differenzierbar ist und wir die Ableitung f' kennen. Wir wollen nun analog dazu das Sekantenverfahren herleiten, das nur den Funktionswert $f(x)$ benötigt. Für zwei gegebene Werte x_n, x_{n-1} erhalten wir den neuen Wert x_{n+1} indem wir die Sekante durch $(x_n, f(x_n))$ und $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ mit der x-Achse schneiden.

i. Bestimmen Sie die Parametergleichung für die Sekante.

ii. Leiten Sie die Rekursionsformel für x_{n+1} her.

iii. Berechnen Sie die ersten drei Näherungen von $\sqrt{2}$ mit den beiden Startwerten $x_0 = 0, x_1 = 1$.

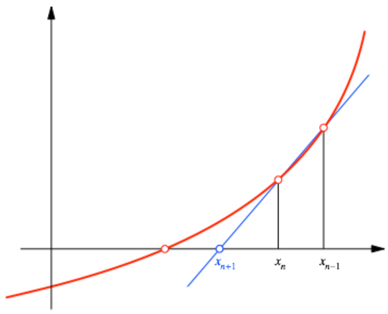
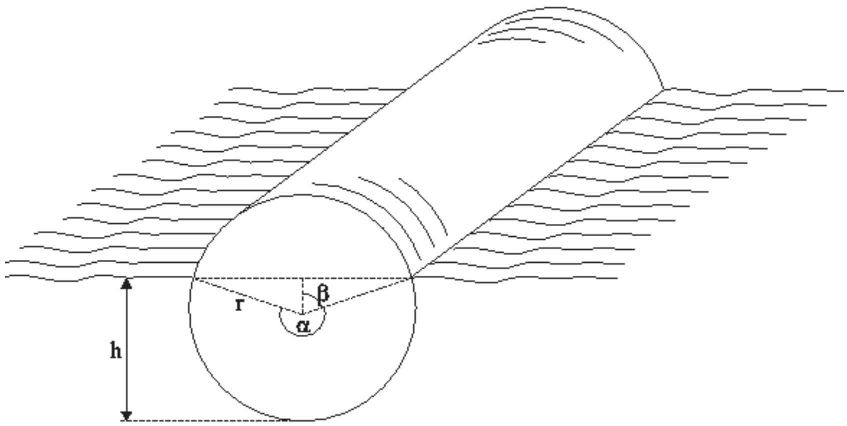


Abbildung 1: Sekantenverfahren

4. Ein runder Holzbalken schwimmt im Wasser (Dichte $\varrho_0 = 1\,g/cm^3$). Der Balken hat die Dichte ϱ_1, die Länge l und den Radius r.
Mit dem Gesetz von Archimedes (das Gewicht eines schwimmenden Körpers ist gleich dem Gewicht des durch ihn verdrängten Wassers) können wir eine Gleichung zur Bestimmung der Eintauchtiefe h bzw. des Öffnungswinkels α (siehe Skizze) aufstellen:



$$r^2\pi \cdot l\varrho_1 = \left[\frac{r^2}{2}\alpha + r^2 \sin\big(\underbrace{\pi - \frac{\alpha}{2}}_{=\beta}\big) \cdot \cos\big(\underbrace{\pi - \frac{\alpha}{2}}_{=\beta}\big)\right] \cdot l\varrho_0 \qquad (1)$$

Multiplikation mit $\dfrac{2}{r^2\varrho_0 l}$ und Definition des Dichtequotienten $\varrho = \dfrac{\varrho_1}{\varrho_0} \in (0,1)$ führen zu

$$\alpha - \sin\alpha = 2\pi\varrho. \qquad (2)$$

Diese Gleichung lässt sich nicht analytisch, sondern nur näherungsweise, also numerisch, lösen. Die dürfen dazu den Taschenrechner verwenden.

a) Überlegen Sie sich, weshalb die Gleichung (1) stimmt.

b) Leiten Sie Gleichung (2) wie beschrieben aus Gleichung (1) her.

c) Bringen Sie die Gleichung (2) auf die Form eines Nullstellenproblems $f(\alpha) = 0$.

d) Skizzieren Sie die Funktion $f(\alpha)$ für $\varrho = 0.8$ (Eichenholz). Tragen Sie zusätzlich die Tangente an den Graphen im Punkt $(\alpha_0, f(\alpha_0))$ ein, wobei $\alpha_0 = 5$ sein soll.

e) Wie lautet die Tangentengleichung? Berechnen Sie die Stelle α_1, an der die Tangente die α-Achse schneidet. (Dies entspricht dem ersten Schritt eines Newton-Verfahrens zur Nullstellensuche.)

f) Führen Sie fünf weitere Iterationsschritte gemäss Newton-Verfahren aus.

g) Wie gross ist die Eintauchtiefe des Balkens näherungsweise?