Analysis D-BAUG
Dr. Meike Akveld HS 2015

Serie 8 - Parametrisierte Kurven

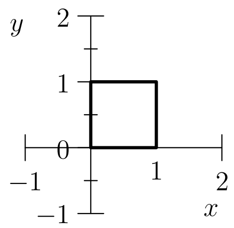
1. Geben Sie für die folgenden Bewegungen eines Punktes jeweils eine parametrisierte Darstellung

$$I = [0,1] \to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

an.

a) Geradlinige Bewegung von $P_1 = (x_1, y_1)$ nach $P_2 = (x_2, y_2)$, wobei $P_1 \neq P_2$.

b) Einmaliger Umlauf um das Einheitsquadrat (siehe Bild), startend im Ursprung, gegen den Uhrzeigersinn.



c) Dreimaliger Umlauf im Uhrzeigersinn eines Kreises mit Mittelpunkt $(5, 0)$ und Radius 4 mit Start beim Punkt $(5, 4)$.

2. Wir betrachten ein rollendes Rad (z.B. einen Autoreifen). Als Modell dafür soll ein Kreis mit Radius R dienen, der in einem x-y-Koordinatensystem auf der positiven x-Achse abrollt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich die Radnabe an der Stelle $(0, R)$.

a) Zum Zeitpunkt $t = 0$ markieren wir den Punkt $P = (0, R - r)$ auf dem Rad, wobei $0 < r < R$ ist. Wie lautet die Kurve $P_t : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$, welche die Bewegung dieses Punktes während des Abrollvorgangs beschreibt?

b) Skizzieren Sie die Kurve P_t für den Fall $r = \frac{R}{2}$.

c) Wie sieht die Kurve P_t im (theoretischen) Fall $r = \frac{3}{2}R$ aus?

3. *(Evolute - Geometrischer Ort der Krümmungsmittelpunkte)*

a) Finden Sie für die Parabel $y = 1 - x^2$ eine Darstellung als Kurve

$$r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie für die in (a) gefundene Kurve die Einheitsnormale $n(t)$.

c) Berechnen Sie die Krümmung der Kurve als Funktion von t gemäss der Formel

$$k(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{3/2}}.$$

d) Berechnen Sie den geometrischen Ort

$$M(t) = r(t) + \frac{1}{k(t)} \cdot n(t)$$

aller Krümmungsmittelpunkte (die sogenannte Evolute) der obigen Kurve.

e) Skizzieren Sie die Parabel zusammen mit ihrer Evolute.

f) Sei $y = f(x)$ eine Kurve in expliziter Form, wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion ist. Beweisen Sie für die Krümmung an der Stelle x die Formel

$$k(x) = \frac{f''(x)}{(1 + f'^2(x))^{\frac{3}{2}}}.$$

Benutzen Sie diese Formel, um die Krümmung der Parabel aus Teilaufgabe (a) zu bestimmen und vergleichen Sie das Ergebnis mit Ihrem Resultat aus Teilaufgabe (c).

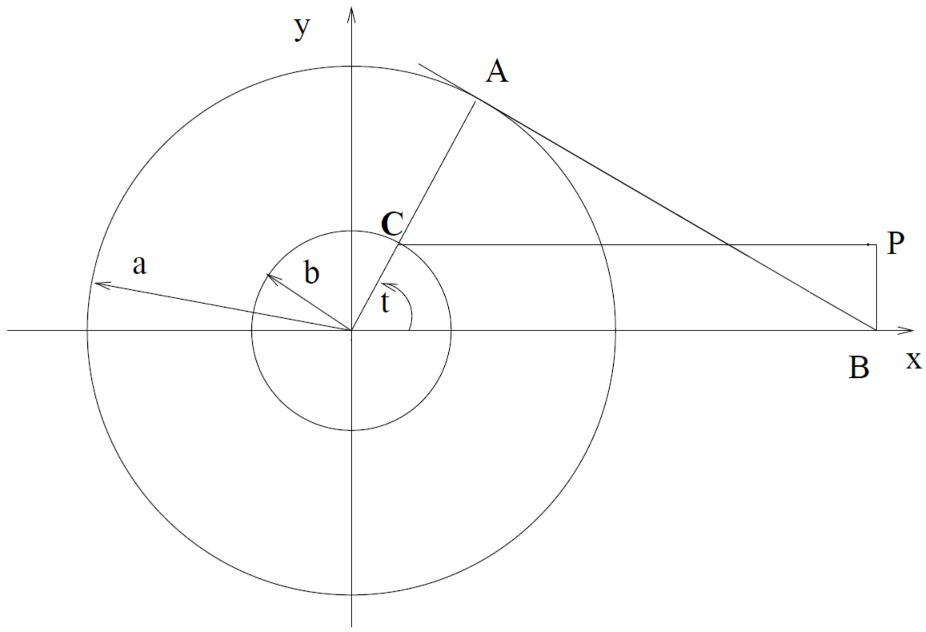
4. Prüfungsaufgabe 3, Sommer 2009. Eine Kanonenkugel wird vom Punkt $(0, 0)$ aus mit Geschwindigkeit v unter einem Winkel $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gegenüber der positiven x-Achse abgeschossen. Behandelt man die Kugel als Punktmasse und orientiert die Schwerkraft in Richtung der negativen y-Achse, ist die Bewegung beschrieben durch:

$$\begin{aligned} x(t) &= v \cos(\varphi) t \\ y(t) &= v \sin(\varphi) t - 5t^2. \end{aligned}$$

a) Wie muss der Winkel φ bei vorgegebenem v gewählt werden, damit die Kugel möglichst weit fliegt, bevor sie auf dem Boden (der x-Achse) auftrifft? Argumentieren Sie, warum es sich bei dem von Ihnen gefundenen Wert tatsächlich um ein Maximum handelt!

b) Wo landet die Kugel bei diesem Abschusswinkel, wenn $v = 100$ ist?

5. Prüfungsaufgabe 3, Sommer 2011. Gegeben sind die reellen Zahlen $a > b > 0$. Der Punkt $P(t)$ ist definiert in Abhängigkeit vom Winkel t (siehe Abbildung). Dabei ist die y-Koordinate von $P(t)$ gleich der y-Koordinate des entsprechenden Punktes C auf dem kleinen Kreis. Die x-Koordinate erhält man indem man die Tangente am ensprechenden Punkt auf dem grösseren Kreis mit der x-Achse schneidet. Bestimmen Sie die Parametriesierung $P(t)$, eliminieren Sie dann den Parameter t aus den Gleichungen und bestimmen Sie die Kurvengleichung. Skizzieren Sie diese Kurve.


y
A
C
P
a
b
t
B
x