Serie 9 - Potenzreihen

1. **Prüfungsaufgabe 2, Winter 2012.** Eine Funktion $f : (-\rho, \rho) \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch die Potenzreihe
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} x^n.$$

   a) Ermitteln Sie den Konvergenzradius ρ dieser Potenzreihe.

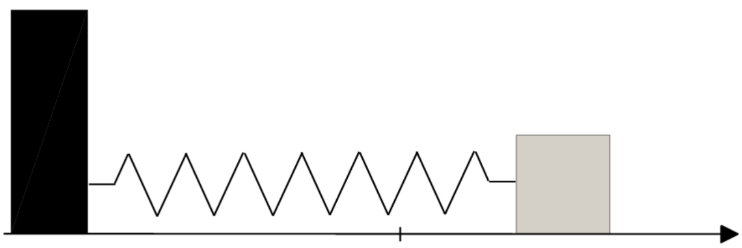
   b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion F von f derart, dass $F(0) = 0$. Stellen Sie F zunächst als Potenzreihe und anschliessend als elementare Funktion dar.

   c) Verwenden Sie F um eine Darstellung von f als elementare Funktion zu erhalten.

2. **Prüfungsaufgabe 3, Sommer 2008.** Entwickeln Sie die Funktion
$$f(x) = \frac{2}{1 - x + x^2 - x^3}$$
in eine Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und bestimmen Sie deren Konvergenzradius.

3. **Prüfungsaufgabe 3, Winter 2009.** Die Koeffizienten der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ seien gegeben durch
$$a_0 = 2 \qquad \text{und} \qquad a_n = \frac{2(n+1)}{n} \cdot a_{n-1}, \quad n \geq 1.$$
Ermitteln Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe und zeigen Sie, dass diese im Inneren ihres Konvergenzkreises der Funktion $f(x) = \frac{2}{(1-2x)^2}$ entspricht.

4. *(Harmonischer Oszillator)*



Eine Masse m, welche mit einer Feder der Federkonstante k verbunden ist und entlang der x-Achse reibungsfrei schwingt, genügt der Gleichung
$$x''(t) = -\frac{k}{m}\, x(t).$$

Dabei bezeichnet $x(t)$ die Auslenkung aus der Ruhelage $x = 0$ zum Zeitpunkt t. Die Vorgabe von sogenannten Anfangswerten $x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$ für Auslenkung bzw. Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ legt die Bewegung der Masse eindeutig fest.

Wir betrachten nun einen Spezialfall dieses physikalischen Problems und nehmen im Folgenden an, dass $\frac{k}{m} = 1$, $x_0 = 0$ und $v_0 = 1$. Wir wollen diesen Spezialfall nun mit Hilfe von Potenzreihen lösen, indem wir $f(x)$ anstelle von $x(t)$ schreiben.

Gesucht ist also eine Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, x^k$ mit

$$f''(x) = -f(x) \quad \text{für alle } x \text{ und} \quad f(0) = 0, \;\; f'(0) = 1.$$

Bestimmen Sie sämtliche Koeffizienten a_k der gesuchten Potenzreihe.