Serie 11 - Integralrechnung

1. Repetition. Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\int (x^3 + 4x - 5)\,\mathrm{d}x$
b) $\int e^{-4x}\,\mathrm{d}x$
c) $\int \sqrt{3x}\,\mathrm{d}x$
d) $\int \cos(5x-2)\,\mathrm{d}x$
e) $\int \cosh(5x-2)\,\mathrm{d}x$
f) $\int (2x-5)^{-3/2}\,\mathrm{d}x$
g) $\int_1^5 \frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x$
h) $\int_9^{65} \frac{1}{3x-3}\,\mathrm{d}x$

2. Abbildung 1 zeigt die Graphen der beiden Funktionen

$$f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 5x - 2 \qquad \text{und} \qquad g(x) = 2x^2 - x - 2.$$

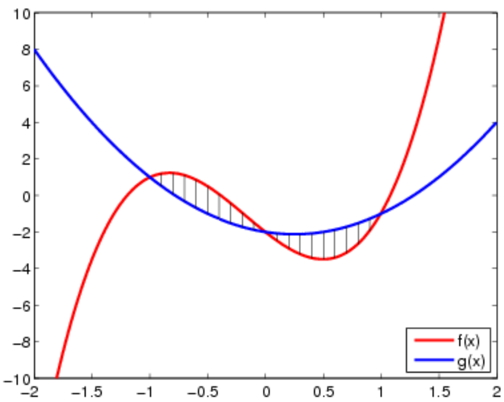


Abbildung 1: Die beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ aus Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie die Stellen $x_1 < x_2 < x_3$, an denen sich die Graphen der beiden Funktionen schneiden.
b) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_{x_1}^{x_3} \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x$.
c) Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Fläche.

3. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ durch eine konstante Funktion zu approximieren. Eine Variante ist die konstante Taylorapproximation (in einem bestimmten Punkt). Wir wollen nun eine Alternative anschauen. Die Funktion f

wird hier auf dem Bereich $a \leq x \leq b$ durch eine konstante Funktion f_0 so approximiert, dass das Integral

$$\int_a^b (f(x) - f_0)^2 \mathrm{d}x$$

minimal wird. Leiten Sie eine Formel für f_0 her.

4. a) Skizzieren Sie die Funktion $f_1 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f_1(x) = \frac{1}{k} \quad \text{für } x \in [k-1, k).$$

Was ist der Zusammenhang zwischen der harmonischen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ und dem Integral $\int_0^\infty f_1(x)\,\mathrm{d}x$? Begründen Sie Ihre Antwort!

b) Zeigen Sie die **Divergenz** der harmonischen Reihe, indem Sie eine Funktion $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $0 \leq g(x) \leq f_1(x)$ finden, so dass

$$\int_0^\infty g(x)\,\mathrm{d}x = \infty.$$

c) Für die Funktion $f_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f_2(x) = \frac{1}{k^2} \quad \text{für } x \in [k-1, k),$$

gilt

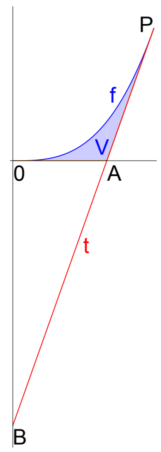
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \int_0^\infty f_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Zeigen Sie, dass $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ **konvergiert**, indem Sie eine Funktion $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $h(x) \geq f_2(x)$ finden, so dass

$$\int_0^\infty h(x)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

d) Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ mit $\alpha > 1$? Begründen Sie Ihre Antwort!

5. Für $n > 1$ betrachten wir die Funktion $f(x) = x^n$. Für einen beliebigen Punkt P auf dem Graphen sei t die Tangente in P. Des weiteren bezeichnen A und B die Schnittpunkte von t mit der x- bzw. y-Achse und V die von der Funktion f, der Tangente t und der x-Achse eingeschlossene Fläche (siehe Abbildung).



Zeigen Sie, dass

$$\frac{V}{\Delta(0AB)} = \frac{1}{n^2 - 1}$$

gilt, wobei $\Delta(0AB)$ die Fläche des Dreiecks $0AB$ bezeichnet.

6. Bestimmung des Zuwachses der Konsumentenrente auf Grund von einem zweiten Tunnel durch die Alpen.

Ihre Firma hat den Auftrag bekommen, eine Kosten-Nutzen-Analyse für einen zweiten Gotthardtunnel durchzuführen. Ihre Aufgabe ist es, eine realistische Schätzung für den Netto-Nutzen eines zweiten Tunnels für die Konsumenten anzugeben. Dafür muss man die Fläche zwischen einer geschätzten Nachfragekurve und den jeweiligen Staukosten (siehe Abbildung 2) für die beiden Szenarien (ein Tunnel versus zwei Tunnel) bestimmen. Die Staukosten funktionieren wie ein Preis für die Benutzung des Tunnels.

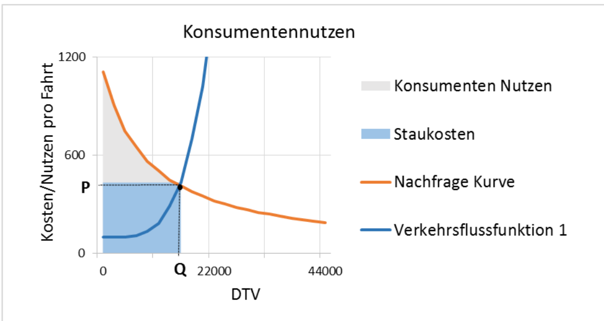


Abbildung 2: Konsumentennutzen

Verwenden Sie für die folgenden Aufgaben ein Computeralgebrasystem Ihrer Wahl.

a) **Nachfrage:** Beobachtungen über mehrere Jahre haben folgende Daten über die Nachfrage (gemessen in DTV = Daily Traffic Volume) als Funktion der Staukosten ergeben - siehe Abbildung 3.

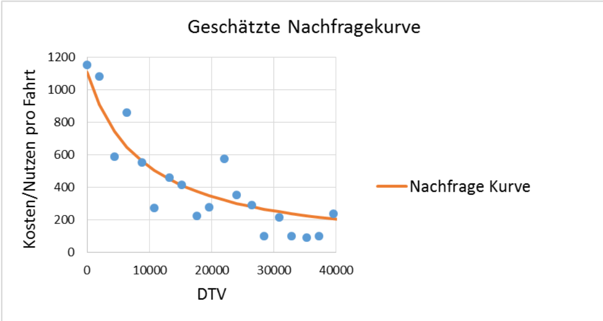


Abbildung 3: Geschätze Nachfragekurve

Eine Trendlinie ist gegeben durch die folgende Formel

$$\text{Nachfrage} = \frac{10'000'000}{\text{Fahrkosten}} - 9'000 \tag{1}$$

oder in der üblichen Form für eine Nachfragekurve

$$\text{Fahrtkosten} = \frac{10'000'000}{\text{Nachfrage} + 9'000} \tag{2}$$

Angebot: Normalerweise stellt eine Angebotskurve die verschiedenen Mengen dar, die ein Produzent zu verschiedenem Preisen zu liefern bereit ist. Im Falle eines Tunnels ist die Situation etwas anders. Der Tunnel kann von einer unterschiedlichen Anzahl Nutzern gleichzeitig befahren werden, wobei eine grössere Anzahl an Nutzern zu grösseren Staukosten pro Fahrzeug führt. Das Endresultat ist aber dasselbe: eine monoton steigende Kurve, die das Verhältnis zwischen einer Anzahl und den dazu gehörenden Kosten (hier P) angibt. Sie haben sich für das folgenden vereinfachten Verkehrsflussmodell entschieden

$$\text{Staukosten} = 100 \cdot \left(1 + 0.15 \left(\frac{\text{Nachfrage}}{\text{Kapazitt}}\right)^4\right) \tag{3}$$

wobei die Kapazität für einen Tunnel 7'000 ist und für zwei 14'000.

Skizzieren Sie die Kurven, die durch die Gleichungen (2) und (3) definiert sind (für zwei Szenarien), in einem Koordinatensystem (horizontal DVT, vertikal die Kosten pro Fahrt).

b) **Gleichgewichtspreis:** Der Schnittpunkt einer Angebots- und einer Nachfragekurve nennt man den Gleichgewichtspunkt.

   Bestimmen Sie für beide Szenarien die Gleichgewichtsnachfrage ($Q_{\text{Gleichgewicht}}$) und den Gleichgewichtspreis ($P_{\text{Gleichgewicht}}$).

c) **Konsumentenrente:** Üblicherweise definiert man die Konsumentenrente als die Fläche zwischen der Nachfragekurve und der horizontalen Gerade, die durch $P = P_{\text{Gleichgewicht}}$ gegeben ist, über dem Interval $[0, Q_{\text{Gleichgewicht}}]$.

Bestimmen Sie für beide Szenarien die Konsumentenrente und berechnen Sie die Differenz. Fazit?