

Serie 12 - Integrationstechniken

1. Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\int e^{2x} \cdot \cos(x) dx$

b) $\int_0^1 t^2 \cdot \cosh(2t) dt$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x) dx$

d) $\int_{99}^{100} \sqrt{x^5 - 99x^4} dx$

e) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{8 \ln\left(\frac{1}{\tan x}\right)}{\sin x \cos x} dx$

f) $\int_0^1 \frac{t(e^t + \frac{1}{t}e^t)}{e + te^t} dt$

g) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx$, für $n, m \in \mathbb{N}$

h) $\int \sqrt{\frac{x^3 - 3}{x^{11}}} dx$

2. Ziel dieser Aufgabe ist es, eine Rekursionsformel für das Integral

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \quad (1)$$

zu finden.

- Berechnen Sie die ersten zwei Integrale I_0 und I_1 .
- Bestimmen Sie $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ mit Hilfe von partieller Integration.
- Finden Sie eine allgemeine Formel für I_n .
- Verwenden Sie die Rekursionsformel um I_7 zu berechnen.

3. Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

a) **Prüfungsaufgabe 4c), Sommer 2012.**

$$\int \frac{3x^2 - 7x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx$$

b) **Prüfungsaufgabe 4c), Winter 2012.**

$$\int \frac{x^2 + 6}{x^3 - 7x^2 + 18x - 12} dx$$

4. Beweisen Sie:

Jede Stammfunktion einer stetigen, ungeraden Funktion $f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ ist gerade.

5. Die Krümmung κ des Graphen einer Funktion f ist gegeben durch

$$\kappa(x) = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2)$$

Wie gross ist die durchschnittliche Krümmung der Funktion $f(x) = e^x$ im Bereich von 0 bis 1?