Analysis D-BAUG
Dr. Meike Akveld HS 2015

Serie 13 - Anwendungen der Integralrechnung I

1. Für die Hyperbel mit der Gleichung $x^2 - y^2 = 1$ (siehe Abbildung) betrachten wir die Parametrisierung

$$r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie den Inhalt der grau markierten Fläche in Abbildung 1, welche von der x-Achse, der Hyperbel und dem Leitstrahl vom Ursprung zum Punkt $r(T)$ begrenzt wird.

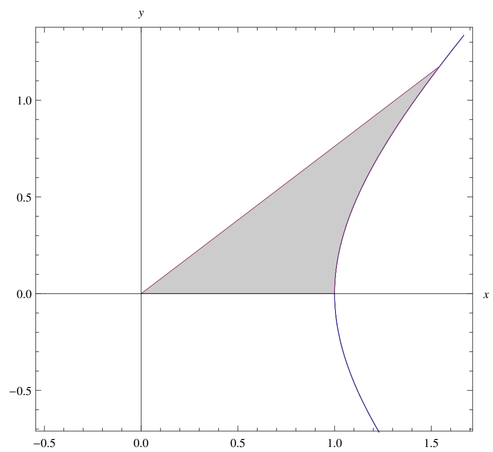


Abbildung 1: Die gesuchte Fläche ist grau hinterlegt.

b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Inhalt dieser Fläche und dem Parameter T?

2. a) Berechnen Sie die Länge der Kurve, welche parametrisiert ist durch

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t}\cos(5t) \\ \mathrm{e}^{-t}\sin(5t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

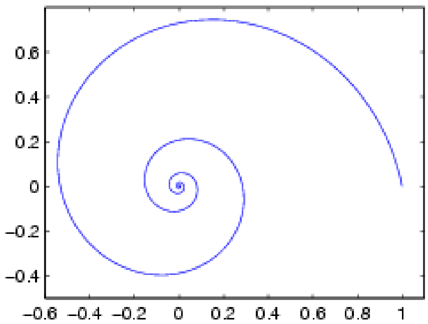
Die Kurve ist in der Abbildung auf der linken Seite skizziert.

b) Bestimmen Sie die Länge der Kurve, welche der Gleichung

$$y^2 = 1 - |x|$$

genügt. Die Kurve ist in der Abbildung auf der rechten Seite dargestellt.

c) Welche Länge besitzt die Kurve aus Teilaufgabe a), wenn man $t \in [0, 2\pi]$ durch $t \in [0, \infty)$ ersetzt?



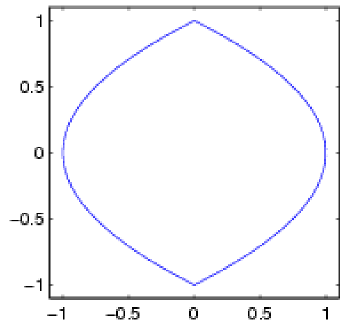


Abbildung 2: Die Kurven aus Teilaufgabe a) (links) und b) (rechts).

3. Berechnen Sie die Oberfläche und das Volumen einer Kugel mit Radius 1, aus der ein zylinderförmiges Loch mit Radius $a < 1$ symmetrisch zum Mittelpunkt herausgebohrt wurde.

4. Approximieren Sie das folgende Integral:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x$$