Serie 7

1. Was für eine Kurve stellt die Parametrisierung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin(1-t^2) \\ \cos(1-t^2) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

dar?

i) ✓ Ein Kreis
ii) ✗ Eine Ellipse
iii) ✗ Eine Parabel
iv) ✗ Eine Gerade
v) ✗ Ein anderes Objekt
vi) ✗ Diese Parametrisierung ist mathematisch nicht zulässig.

Lösung
Es gilt

$$x^2(t) + y^2(t) = \sin^2(1-t^2) + \cos^2(1-t^2) = 1,$$

was der Kreisgleichung des Einheitskreises entspricht. Der Term $1-t^2$ nimmt auch alle Werte in $[-2\pi, 0]$ an für $t \in \mathbb{R}$, also wird der gesamte Einheitskreis gezeichnet.

2. Wir betrachten für $C, l \in (0, \infty)$ die *Bernoulli-Spirale*, welche durch alle Punkte in $\mathbb{R}^2$ gegeben ist, deren Polarkoordinaten (ϱ, φ) die Gleichung

$$\varrho = Ce^{l\varphi}$$

erfüllen. Welche Aussagen sind richtig?

i) ✗ Die Differenz der x-Koordinaten zweier aufeinanderfolgender Schnittpunkte der Spirale mit der positiven x-Achse ist konstant.
ii) ✗ Die Evolute der Bernoulli'schen Spirale ist in Polarkoordinaten für $a, b \in \mathbb{R}$ durch die Gleichung $\varrho = a + b\varphi$ gegeben.
iii) ✓ Der Winkel zwischen dem Ortsvektor $\vec{r}(\varphi)$ eines Punktes auf der Spirale und seinem Tangentialvektor $\dot{\vec{r}}(\varphi)$ ist konstant.
iv) ✓ Der Quotient der x-Koordinaten zweier aufeinanderfolgender Schnittpunkte der Spirale mit der positiven x-Achse ist konstant.

- **Lösung**
  Die erste Option ist falsch.
  Eine Parametrisierung der Bernoulli-Spirale ist durch

$$\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ce^{l\varphi}\cos(\varphi) \\ Ce^{l\varphi}\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

gegeben (für $\varphi \in \mathbb{R}$). Die Schnittpunkte mit der x-Achse erhält man also aus der Gleichung

$$y(\varphi) = Ce^{l\varphi}\sin(\varphi) = 0$$

mit den Lösungen $\varphi = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Die Schnittpunkte mit der positiven x-Achse sind also

$$(x(2\pi k), 0) = (Ce^{2l\pi k}, 0),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Die Differenz der x-Koordinaten zweier aufeinanderfolgender solcher Punkte ist also

$$x(2\pi k) - x(2\pi(k-1)) = Ce^{2l\pi k} - Ce^{2l\pi(k-1)},$$

was nicht konstant ist, da der Wert von k abhängt.

- **Lösung**
  Die zweite Option ist falsch.
  In der Vorlesung wurde gezeigt, dass im Spezialfall $C = l = 1$ die Bernoulli-Spirale

$$\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} e^{\varphi}\cos(\varphi) \\ e^{\varphi}\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

  die Evolute

$$\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} -e^{\varphi}\sin(\varphi) \\ e^{\varphi}\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

  besitzt. Insbesondere bekommen wir diese Evolute durch eine Drehung der Spirale um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ im Gegenuhrzeigersinn. Die Evolute ist also wiederum eine Bernoulli-Spirale.

- **Lösung**
  Die dritte Option ist richtig.
  Der Tangentialvektor ist

$$\dot{\vec{r}}(\varphi) = \begin{pmatrix} Cle^{l\varphi}\cos(\varphi) - Ce^{l\varphi}\sin(\varphi) \\ Cle^{l\varphi}\sin(\varphi) + Ce^{l\varphi}\cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

  Der gesuchte Winkel α wird nach Definition des Skalarproduktes berechnet durch

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{r}(\varphi)\cdot\dot{\vec{r}}(\varphi)}{|\vec{r}(\varphi)|\cdot|\dot{\vec{r}}(\varphi)|} = \frac{C^2le^{2l\varphi}}{\sqrt{C^2e^{2l\varphi}}\cdot\sqrt{C^2l^2e^{2l\varphi} + C^2e^{2l\varphi}}} = \frac{l}{\sqrt{l^2+1}},$$

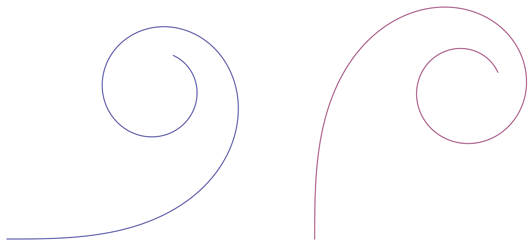
  welcher unabhängig von φ ist.

- **Lösung**
  Die vierte Option ist richtig.
  Der Quotient der x-Koordinaten zweier aufeinanderfolgender solcher Punkte ist

$$\frac{x(2\pi k)}{x(2\pi(k-1))} = \frac{Ce^{2l\pi k}}{Ce^{2l\pi(k-1)}} = e^{2\pi l}.$$

  Dies ist unabhängig von k.

3. Gegeben sind die Kurven K_1 (links) und K_2 (rechts), die beide für wachsenden Parameter t von links nach rechts durchlaufen werden. Es bezeichnen $k_1(t)$ und $k_2(t)$ die Krümmungen der beiden Kurven. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?



i) ✓ k_1 ist positiv.

ii) ✓ $t \mapsto k_2(t)$ ist monoton fallend.

iii) ✓ k_2 ist negativ.

iv) ✓ $t \mapsto k_1(t)$ ist monoton wachsend.

Lösung
Die erste Kurve krümmt sich nach links, also ist k_1 positiv. Analog krümmt sich die zweite Kurve nach rechts, also ist k_2 negativ. Der Krümmungskreis wird bei beiden Kurven mit steigendem t kleiner, d. h. der Krümmungsradius $1/|k|$ wird in beiden Fällen kleiner. Beide Krümmungen k_1 und k_2 sind damit im Absolutbetrag monoton wachsend. Da k_2 negativ ist, muss es also monoton fallend sein.

4. Welche der folgenden Kurven haben konstante Krümmung?

i) ✓ Der Kreis mit Mittelpunkt $(\frac{\sqrt{3}}{5}, 0)$ und Radius $\frac{7}{8}$.

ii) ✗ Die Ellipse mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Halbachsen $a = 2$ und $b = 3$.

iii) ✓ Die Kurve $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (4t, 7t - 8)$.

iv) ✓ Die Gerade durch $(2, -3)$ mit Steigung 1.

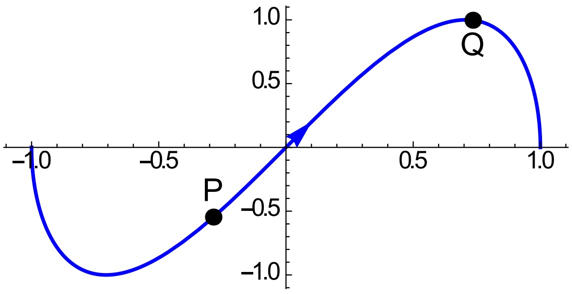
- **Lösung**
  Die erste Option ist richtig.
  In der Vorlesung haben wir gesehen, dass die Krümmung eines Kreises mit Radius r immer gleich $1/r$ ist. In unserem Beispiel ist die Krümmung also konstant gleich $8/7$.
- **Lösung**
  Die zweite Option ist falsch.
  In der Vorlesung wurde für die Krümmung einer Ellipse mit den Halbachsen a und b die Formel
  $$k(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}$$
  hergeleitet. Für verschiedene Werte von t ändert sich also $k(t)$.

- **Lösung**
  Die dritte Option ist richtig.
  Es gilt $\ddot{x}(t) = \ddot{y}(t) = 0$, somit ist die Krümmung konstant gleich Null. Die Kurve ist insbesondere eine Gerade.
- **Lösung**
  Die vierte Option ist richtig.
  Die Gerade wird beispielsweise parametrisiert durch

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t-5 \end{pmatrix},$$

  es gilt also $\ddot{x}(t) = \ddot{y}(t) = 0$. Analog sieht man, dass jede Gerade Krümmung Null hat.

5. Prüfungsaufgabe Sommer 2015:
Betrachte die Kurve im Bild, die in Pfeilrichtung durchlaufen wird.



Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

i) ✗ Der Absolutwert der Krümmung in P ist grösser als in Q.

ii) ✓ In den Punkten mit $-1 < x < -\frac{1}{2}$ ist die Krümmung positiv.

iii) ✓ Es sei eine ebene Kurve gegeben durch die Parametrisierung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}, \ t \in [0, \pi].$$

Dann ist eine explizite Darstellung dieser Kurve gegeben durch

$$y(x) = 2x\sqrt{1-x^2}, \ \text{für } x \in [-1, 1].$$

- **Lösung**
  Die erste Option ist falsch.
  Die Krümmung ist (bis auf das Vorzeichen) das Inverse des Krümmungsradius. Der Krümmungsradius wiederum ist der Radius des Kreises, welcher die Kurve (in dem jeweiligen Punkt) am besten approximiert. Wenn wir in P und in Q einen Kreis an die Kurve legen, so sehen wir, dass der Radius in Q echt kleiner sein wird als in P. Folglich ist die absolute Krümmung in Q echt grösser als in P.

- **Lösung**
  Die zweite Option ist richtig.
  Die Krümmung ist positiv, wenn der Weg eine Linkskurve beschreibt (und umgekehrt). Gemäss Pfeilrichtung beschreibt der Weg von $x = -1$ bis $x = 0$ eine Linkskurve.
- **Lösung**
  Die dritte Option ist richtig.
  Um die explizite Darstellung zu erhalten, eliminieren wir den Parameter t. Wir benutzen die trigonometrische Identität $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$ und erhalten den Zusammenhang
  $$y = 2x\sin(t) \quad \text{mit } x = \cos(t).$$
  Mit Hilfe der Identität $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ erhalten wir $y = \pm 2x\sqrt{1-x^2}$. Um das Vorzeichen zu bestimmen, setzen wir $t = \frac{\pi}{4}$ in die Parametrisierung ein: es ergibt sich $\vec{r}(\frac{\pi}{4}) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ und damit muss also für $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ auch $y = 1$ sein. Folglich ist
  $$y(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$$
  richtig.

6. Bestimme den im ersten Quadranten ($x > 0$, $y > 0$) liegenden Schnittpunkt der Kurven $xy = 3$ und $x^2 - y^2 = 8$. Beweise ausserdem, dass sich die Kurven in diesem Punkt orthogonal schneiden (d. h. dass die beiden Tangenten aufeinander senkrecht stehen).

Lösung
Wir bestimmen zunächst den gesuchten Schnittpunkt.
Aus der Gleichung für die erste Kurve sehen wir direkt, dass kein Punkt mit $x = 0$ darauf liegt, also dürfen wir durch x teilen und erhalten $y = \frac{3}{x}$.
Dies setzen wir in die zweite Gleichung ein und erhalten

$$x^2 - \frac{9}{x^2} = 8 \quad \Longleftrightarrow \quad x^4 - 9 = 8x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x^4 - 8x^2 - 9 = 0.$$

Mit der Substitution $z = x^2$ müssen wir also die quadratische Gleichung

$$z^2 - 8z - 9 = 0$$

lösen. Dies ergibt

$$z = \frac{8 \pm \sqrt{64+36}}{2} = 4 \pm 5 = -1 \text{ oder } 9.$$

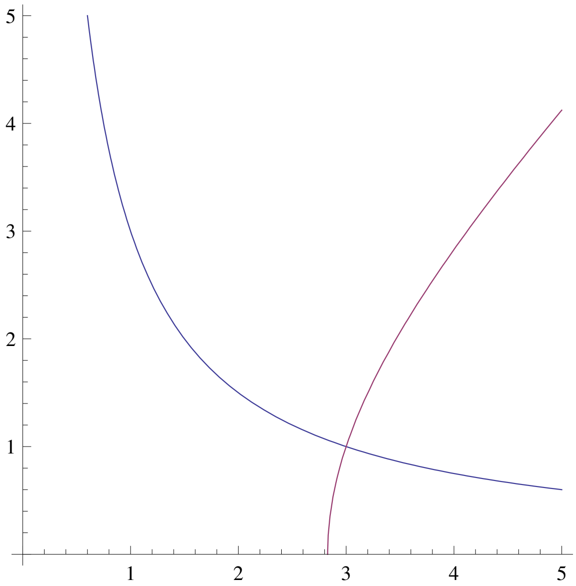
Wegen $z = x^2$ ist nur $z = 9$ eine mögliche Lösung, dies führt auf $x = \pm 3$. Da wir den Schnittpunkt mit $x > 0$ suchen, kommt nur noch $x = 3$ infrage. Wegen $y = \frac{3}{x}$ finden wir also den Schnittpunkt $(3, 1)$.
Um die Steigung der beiden Kurven im Schnittpunkt zu berechnen, schreiben wir diese zunächst explizit hin: Die erste Kurve ist $f(x) = \frac{3}{x}$, die zweite Kurve $g(x) = \sqrt{x^2-8}$ (für $y > 0$). Das ergibt die Parametrisierungen

$$\vec{r}(x) = \begin{pmatrix} x \\ \frac{3}{x} \end{pmatrix} \text{ und } \vec{s}(x) = \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{x^2-8} \end{pmatrix}.$$

Für den Winkel α zwischen den beiden Kurven gilt somit

$$\cos(\alpha) = \frac{\dot{\vec{r}}(x) \cdot \dot{\vec{s}}(x)}{|\dot{\vec{r}}(x)| \cdot |\dot{\vec{s}}(x)|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-3}{x^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2-8}} \end{pmatrix}}{|\dot{\vec{r}}(x)| \cdot |\dot{\vec{s}}(x)|}.$$

Den Nenner dieses Ausdrucks müssen wir gar nicht weiter auflösen; wir sehen, dass wir für $x = 3$ die Gleichung $\cos(\alpha) = 0$ erhalten, also $\alpha = \pi/2$.



7. Man bestimme die Krümmungsfunktion $t \mapsto k(t)$ sowie die Evolute $t \mapsto \vec{z}(t)$ der kubischen Parabel $t \mapsto \vec{r}(t) = (t, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$. Wo wird die Krümmung minimal oder maximal? (Man beachte das Vorzeichen.) Wie verhält sich $\vec{z}(t)$ in der Nähe von $t = 0$?

Lösung

Wir definieren $x(t) = t$ und $y(t) = t^3$. Die ersten und die zweiten Ableitungen dieser Funktionen sind

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 1, & \dot{y}(t) &= 3t^2, \\ \ddot{x}(t) &= 0, & \ddot{y}(t) &= 6t. \end{aligned}$$

Aus den Formeln für die Krümmung und Evolute von $\vec{r}$ folgt, dass

$$k(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{6t}{(1 + 9t^4)^{3/2}}$$

für $t \in \mathbb{R}$ ist und

$$\begin{aligned} \vec{z}(t) &= \left(x - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} \dot{y},\ y + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} \dot{x} \right) \\ &= \left(t - \frac{1 + 9t^4}{6t} \cdot 3t^2,\ t^3 + \frac{1 + 9t^4}{6t} \right) \\ &= \left(\frac{t - 9t^5}{2}, \frac{1 + 15t^4}{6t} \right) \end{aligned}$$

für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die Evolute ist an der Stelle $t = 0$ also nicht definiert. Dies lässt sich dadurch erklären, dass die Kurve dort einen Wendepunkt besitzt, also Krümmung Null hat.

Die erste Ableitung der Krümmung ist

$$k'(t) = \frac{6(1 - 45t^4)}{(1 + 9t^4)^{5/2}}.$$

Darum hat k mögliche Extrema an den Stellen $t = \pm 45^{-1/4}$. Um zu bestimmen, ob es sich dabei um Maxima, Minima oder Wendepunkte handelt, könnten wir die zweite Ableitung der Krümmung berechnen und das bekannte Kriterium verwenden. Hier wollen wir uns dies jedoch ersparen und beschreiten einen anderen Weg. Es gilt nämlich

$$\lim_{t \to \pm\infty} k(t) = 0, \; k(45^{-1/4}) > 0 \text{ und } k(-45^{-1/4}) < 0,$$

somit liegt an der Stelle $t = -45^{-1/4}$ (bzw. $t = 45^{-1/4}$) ein globales Minimum (bzw. ein globales Maximum) der Krümmung vor.

Für kleine t ist $\vec{z}(t)$ asymptotisch zu $\vec{s}(t) = \left(\frac{t}{2}, \frac{1}{6t}\right)$, da die höheren Potenzen von t vernachlässigbar sind.

8. Prüfungsaufgabe Sommer 2014:

Gegeben ist die Parametrisierung der Kettenlinie

$$\alpha \colon t \mapsto (t, \cosh t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimme die Krümmungsfunktion $t \mapsto k(t)$ der Kurve α sowie den Radius r_0 und das Zentrum z_0 des Krümmungskreises an der Stelle $t = 0$.

Lösung

Definiert man $(x(t), y(t)) := (t, \cosh t) = \alpha(t)$, so kann man die Krümmung durch die folgende Formel bestimmen:

$$k(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{3/2}}.$$

Wir haben $\dot{\alpha}(t) = (1, \sinh t)$ und $\ddot{\alpha}(t) = (0, \cosh t)$. Dann ist

$$k(t) = \frac{\cosh t - 0}{\left(1 + \sinh^2 t\right)^{3/2}} = \frac{\cosh t}{\left(\cosh^2 t\right)^{3/2}} = \frac{1}{\cosh^2 t}.$$

Der Radius r_0 des Krümmungskreises an der Stelle $t = 0$ ist also

$$r_0 = \frac{1}{|k(0)|} = \frac{1}{\left|\frac{1}{\cosh^2(0)}\right|} = 1,$$

und sein Zentrum z_0 ist durch die folgende Formel gegeben (Evolute):

$$z_0 = \alpha(0) + r_0 \cdot \frac{n(0)}{\|n(0)\|},$$

wobei $n : t \longmapsto n(t) = (-\dot{y}(t),\, \dot{x}(t))$ der Normalenvektor ist, welcher aus einer Drehung von $\dot{\alpha}(t)$ im Gegenuhrzeigersinn entsteht. Für n gilt:

$$n(t) = (-\sinh t,\, 1); \quad \|n(t)\| = \sqrt{(-\sinh t)^2 + 1^2} = \cosh t.$$

Somit ist

$$z_0 = (0,\, 1) + 1 \cdot \frac{(-\sinh(0),\, 1)}{\|\cosh(0)\|} = (0, 2).$$

b) Dieser Kreis (mit festem Radius r_0) rolle entlang α ab. Bestimme das Zentrum $z(t)$ des Kreises mit Berührpunkt $\alpha(t)$ sowie den Geschwindigkeitsvektor der Kurve $t \mapsto z(t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$.

Lösung

Das Zentrum $z(t)$ des Kreises mit Radius r_0 und Berührpunkt $\alpha(t)$ wird parametrisiert wie folgt:

$$\begin{aligned} z(t) &= \alpha(t) + r_0 \cdot \frac{n(t)}{\|n(t)\|} = (t,\, \cosh t) + 1 \cdot \frac{(-\sinh t,\, 1)}{\cosh t} \\ &= \left(t - \tanh t,\, \cosh t + \frac{1}{\cosh t}\right). \end{aligned}$$

Der Geschwindigkeitsvektor dieser Kurve ist

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \left(1 - \frac{1}{\cosh^2 t},\, \sinh t - \frac{\sinh t}{\cosh^2 t}\right) = \frac{\cosh^2 t - 1}{\cosh^2 t} \cdot (1, \sinh t) \\ &= \tanh^2 t \cdot (1, \sinh t). \end{aligned}$$

Somit ist $\dot{z}(0) = \tanh^2(0) \cdot (1, \sinh(0)) = (0, 0)$.

9. Das *Kartesische Blatt* ist die Kurve C gegeben durch die Parameterdarstellung

$$x = \frac{t}{t^3 + 1}, \qquad y = \frac{t^2}{t^3 + 1},$$

wobei $-\infty < t < -1$ und $-1 < t < +\infty$.

a) Bestimme die Gleichung, d. h. eine implizite Darstellung, von C.

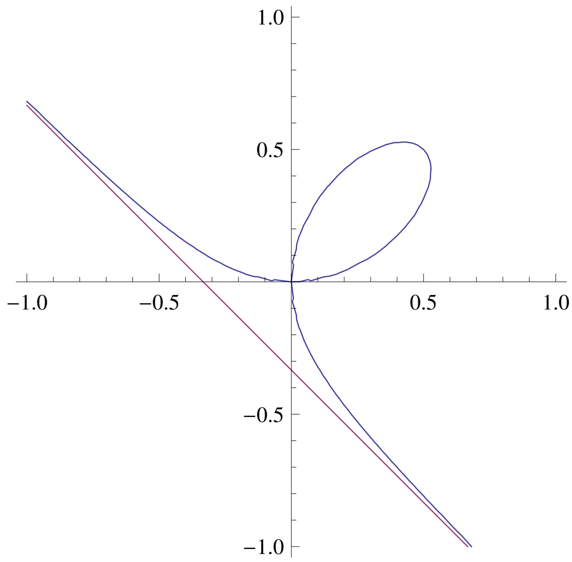
Lösung

Aus

$$x^3 + y^3 = \frac{t^3}{(t^3 + 1)^3} + \frac{t^6}{(t^3 + 1)^3} = \frac{t^3}{(t^3 + 1)^2} = xy$$

ergibt sich die Gleichung

$$x^3 + y^3 - xy = 0.$$



Aus $xy = \frac{t^3}{(t^3+1)^2}$ schliessen wir $t^3 = \frac{1-2xy\pm\sqrt{1-4xy}}{2xy}$, woher wir den Parameter t wieder zurückbekommen können für $xy \neq 0$.

b) Zeige, dass C bezüglich der Geraden $y = x$ symmetrisch verläuft.

Lösung

Die Gleichung $x^3 + y^3 - xy = 0$ ist offensichtlich symmetrisch in x und y (d. h. wir können x und y vertauschen und erhalten wieder dieselbe Gleichung).

c) Bestimme die Schnittpunkte von C mit der Symmetrieachse $y = x$ sowie die Tangenten in diesen Schnittpunkten.

Lösung

Wir setzen $x = y$ in der impliziten Gleichung für C und erhalten

$$x^3 + x^3 - x \cdot x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x^3 = x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0 \text{ oder } x = \tfrac{1}{2}.$$

$(x, y) = (0, 0)$ entspricht dem Parameter $t = 0$.

$(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ entspricht dem Parameter $t = \left(\frac{1-2xy\pm\sqrt{1-4xy}}{2xy}\right)^{1/3}$. Einsetzen ergibt also $t = \left(\frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^{1/3} = 1$.

Die Tangentensteigung berechnet sich zu

$$\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{\frac{2t(t^3+1)-t^2\cdot 3t^2}{(t^3+1)^2}}{\frac{(t^3+1)-t\cdot 3t^2}{(t^3+1)^2}} = \frac{2t(t^3+1) - t^2 \cdot 3t^2}{(t^3+1) - t \cdot 3t^2} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3} = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ -1, & t = 1. \end{cases}$$

Die Tangente durch $(x, y) = (0, 0)$ ist diejenige zu $t = 0$, also $y = 0$. Da die Kurve C symmetrisch ist bezüglich $y = x$, hat sie eine zusätzliche Tangente bei $(0, 0)$, und zwar die y-Achse $x = 0$.

Die Tangente durch $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ist diejenige zu $t = 1$, also $y = -x + q$ für $q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, d. h. $x + y - 1 = 0$.

d) In welchen Punkten sind die Tangenten parallel zu den Koordinatenachsen?
Lösung
Aus **c)** wissen wir, dass die Tangenten durch $(0,0)$ gerade die Koordinatenachsen sind. Es gibt aber noch mehr: Wir setzen die Steigung gleich Null und erhalten

$$\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Longrightarrow \quad t = 0 \text{ oder } t = \sqrt[3]{2}.$$

Das ergibt die Punkte $(x,y) = (0,0)$ und $(\frac{\sqrt[3]{2}}{3}, \frac{\sqrt[3]{4}}{3})$, wo die Tangenten horizontal, also parallel zur x-Achse sind.
Da die Kurve symmetrisch ist bezüglich $y = x$, sind die Tangenten in den Punkten $(x,y) = (0,0)$ und $(\frac{\sqrt[3]{4}}{3}, \frac{\sqrt[3]{2}}{3})$ vertikal, d. h. parallel zur y-Achse.

e) Zeige, dass die Gerade $y = -x - \frac{1}{3}$ eine Asymptote von C ist.
Lösung
Es gilt

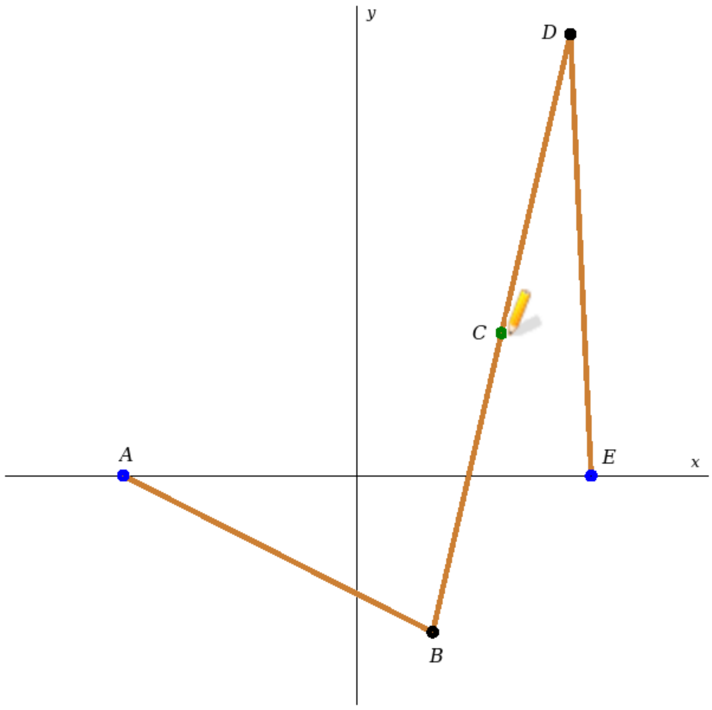
$$\lim_{\substack{t\to-1\\t>-1}} (x(t), y(t)) = (-\infty, \infty) \text{ und } \lim_{\substack{t\to-1\\t<-1}} (x(t), y(t)) = (\infty, -\infty).$$

Wir berechnen also

$$\lim_{t\to-1} y(t) - \left(-x(t) - \frac{1}{3}\right) = \lim_{t\to-1} \frac{t^2}{t^3+1} + \frac{t}{t^3+1} + \frac{1}{3} = \lim_{t\to-1} \frac{t + t^2 + \frac{1}{3}(t^3+1)}{t^3+1}$$
$$\stackrel{\text{B.-H.}}{=} \lim_{t\to-1} \frac{1+2t+t^2}{3t^2} = 0.$$

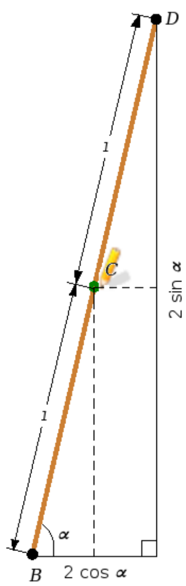
Folglich ist $y = -x - \frac{1}{3}$ eine beidseitige Asymptote.

10. Die Punkte $A = (-1,\, 0)$ und $E = (1,\, 0)$ in der Ebene seien durch drei bewegliche dünne Stäbe AB, BD und DE der Längen $\sqrt{2}$, 2 bzw. $\sqrt{2}$ miteinander verbunden. K sei die Menge aller möglichen Positionen des Mittelpunktes $C = (x,\, y)$ der Strecke BD.



a) Es bezeichne α den Steigungswinkel der Strecke BD. Drücke die Tatsache, dass D im Abstand $\sqrt{2}$ von E liegt, durch eine Gleichung in x, y und α aus.

Lösung



Wenn $C = (x, y)$ ist, dann sind die Koordinaten von D durch

$$D = (x + \cos\alpha,\ y + \sin\alpha)$$

gegeben (siehe das Bild rechts).

Ausserdem bewegt sich der Punkt D in einem Kreis mit Radius $\sqrt{2}$ um den Punkt $E = (1, 0)$. Somit wird die Lage von C durch die Gleichung

$$(x + \cos\alpha - 1)^2 + (y + \sin\alpha)^2 = (\sqrt{2})^2$$

beschrieben. Dies lässt sich in die folgende Gleichung umformen:

$$x^2 + y^2 - 2x(1 - \cos\alpha) + 2y\sin\alpha - 2\cos\alpha = 0.$$

b) Bestimme eine entsprechende Gleichung für B.
Lösung
Es folgt aus dem Bild analog zum obigen Fall, dass

$$B = (x - \cos\alpha,\ y - \sin\alpha)$$

ist. Da sich der Punkt B in einem Kreis mit Radius $\sqrt{2}$ um den Punkt $A = (-1, 0)$ bewegt, lässt sich seine Lage durch die Gleichung

$$(x - \cos\alpha + 1)^2 + (y - \sin\alpha)^2 = (\sqrt{2})^2$$

ausdrücken. Nach einer Umformung bekommt man:

$$x^2 + y^2 + 2x(1 - \cos\alpha) - 2y\sin\alpha - 2\cos\alpha = 0.$$

c) Bilde die Summe sowie die Differenz der in **a)** und **b)** erhaltenen Gleichungen und zeige dann, dass die Punkte in K entweder

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & x^2 + y^2 = 2 \qquad \text{oder} \\ \text{(II)} & (x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2) \end{array}$$

erfüllen.
Lösung
Aus der Summe und Differenz der Resultate aus **a)** und **b)** ergeben sich

$$x^2 + y^2 = 2\cos\alpha \quad (+) \qquad \text{bzw.} \qquad x(1 - \cos\alpha) = y\sin\alpha. \quad (-)$$

Man quadriert die Gleichung $(-)$ und bekommt

$$\begin{aligned} x^2(1 - \cos\alpha)^2 &= y^2\sin^2\alpha \\ &= y^2(1 - \cos^2\alpha) \\ &= y^2(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha). \end{aligned}$$

Somit ergeben sich zwei Möglichkeiten:

$$\cos\alpha = 1 \quad \text{oder} \quad x^2(1 - \cos\alpha) = y^2(1 + \cos\alpha).$$

Zusammen mit der Gleichung $(+)$ erhält man also

$$x^2 + y^2 = 2 \quad \text{oder} \quad x^2\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{2}\right) = y^2\left(1 + \frac{x^2 + y^2}{2}\right).$$

Nach Umformungen der zweiten Gleichung ergibt sich das erwartete Ergebnis, nämlich

$$x^2 + y^2 = 2 \ \text{(I)} \quad \text{oder} \quad (x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2) \ \text{(II)}.$$

d) Welche Kurve beschreibt (I)?

Lösung

Die Gleichung $x^2+y^2=2$ beschreibt implizit den Kreis mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius $\sqrt{2}$.

e) Wie lautet die Gleichung (II) in Polarkoordinaten ϱ, φ?

Hinweis: $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$.

Lösung

Wenn man die Transformation $x = \varrho\cos\varphi$ und $y = \varrho\sin\varphi$, mit $\varrho > 0$, anwendet, dann wird Gleichung (II) zu

$$\varrho^4 = 2(\varrho^2\cos^2\varphi - \varrho^2\sin^2\varphi) = 2\varrho^2\cos(2\varphi)$$

und somit ist

$$\varrho^2 = 2\cos(2\varphi).$$

Es handelt sich um eine *Lemniskate*.

Bemerkungen: Aus der Herleitung in **c)** wissen wir, dass der Kreis nur im Falle $\cos\alpha = 1$, also wenn die Strecke BD horizontal liegt, möglich ist. An den Punkten $(\pm\sqrt{2}, 0)$ kann man zwischen Lemniskate (II) und Kreis (I) hin- und herwechseln. Diese Aufgabe beschreibt den sogenannten Watt-Mechanismus. Weitere Informationen unter: `https://de.wikipedia.org/wiki/Watt-Mechanismus`.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben am Mittwoch, 11. November 2015 in der Vorlesung. Die Multiple-Choice-Aufgaben sind online einzureichen.