D-MAVT, D-MATL
Prof. Dr. Urs Lang

Analysis I
HS 15

Serie 12

1. Der Schwerpunkt einer dünnen, homogenen Platte in der xy-Ebene liegt immer innerhalb dieser Platte, egal welche Form die Platte hat.

i) ✗ Wahr

ii) ✓ Falsch

Lösung
Ein einfaches Gegenbeispiel ist ein Kreisring (beispielsweise mit innerem Radius 1 und äusserem Radius 2). Dann liegt der Schwerpunkt im Ursprung, da ein Kreisring symmetrisch bezüglich beider Achsen ist – der Ursprung liegt aber nicht im Kreisring.

2. Eine dünne Platte in der xy-Ebene mit konstanter Dichte, welche symmetrisch bezüglich der x-Achse ist, hat einen Schwerpunkt mit x-Koordinate gleich Null.

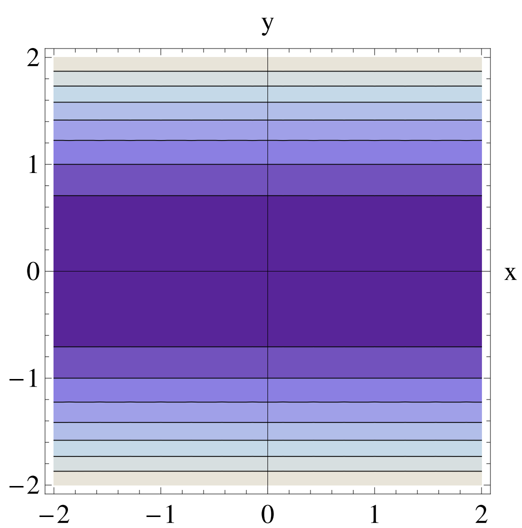
i) ✗ Wahr

ii) ✓ Falsch

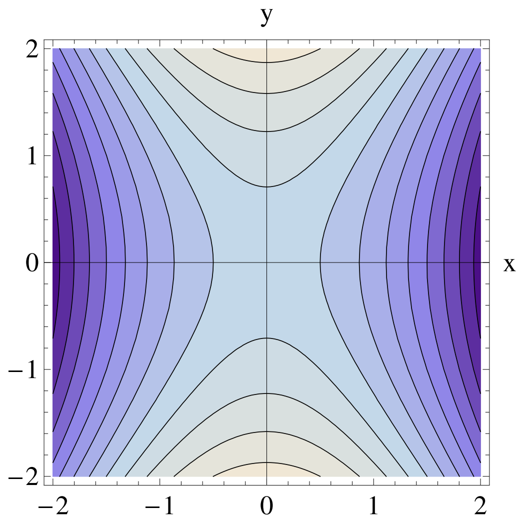
Lösung
Nicht die x-, sondern die y-Koordinate des Schwerpunktes muss Null sein. Ein Gegenbeispiel ist das Dreieck mit Eckpunkten $(0,0),(1,1),(1,-1)$. Dieses ist symmetrisch bezüglich der x-Achse, also gilt $y_S = 0$. Allerdings gilt sicher $x_S > 0$, da das Dreieck komplett im 1. und 4. Quadranten liegt.

3. Welche Niveaulinien passen zur Funktion $f(x,y) = y^2$?

i) ✓



ii) ✗

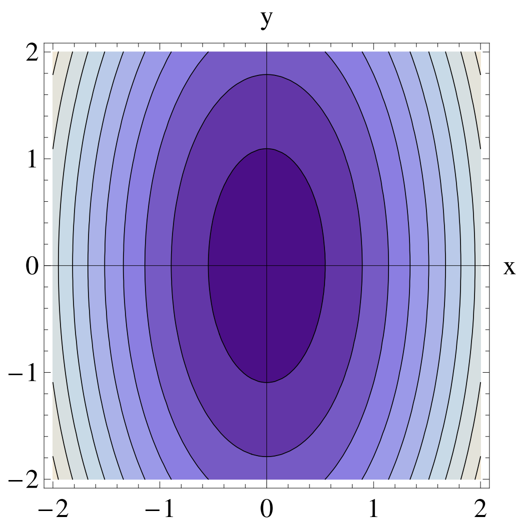


Lösung
Die Niveaulinien zum Niveau C erfüllen $f(x,y) = y^2 = C$. Für $C < 0$ hat diese Gleichung keine Lösung, also existieren in diesem Fall keine Niveaulinien. Für $C \geq 0$ hingegen erhalten wir $y = \pm\sqrt{C}$ als Lösung, somit sind die Niveaulinien für ein Niveau $C > 0$ jeweils die beiden horizontalen Geraden mit Abstand $\sqrt{C}$ von der x-Achse, beziehungsweise die x-Achse im Fall $C = 0$.

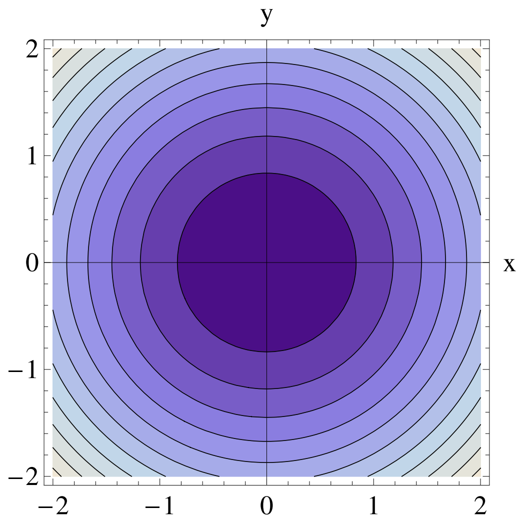
Anders gesagt: Die Funktion f ist in x konstant, also erwarten wir den gleichen Wert (d. h. das gleiche Niveau) für Punkte, welche sich nur in der x-Koordinate unterscheiden. Zu einem Punkt (x_0, y_0) sind also alle Punkte (x, y_0) auf gleichem Niveau, egal was x ist, folglich sind die Geraden parallel zur x-Achse Niveaulinien.

4. Welche Niveaulinien passen zur Funktion $f(x,y) = 4x^2 + y^2$?

i) ✓



ii) ✗



Lösung
Die Niveaulinien zum Niveau C erfüllen $f(x,y) = 4x^2 + y^2 = C$. Für $C < 0$ hat diese Gleichung keine Lösung, also existieren in diesem Fall keine Niveaulinien. Für $C > 0$ hingegen erhalten wir

$$4x^2 + y^2 = C \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{x}{\frac{\sqrt{C}}{2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{C}}\right)^2 = 1,$$

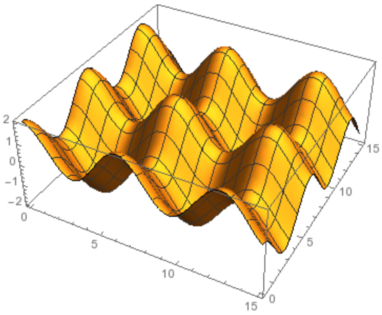
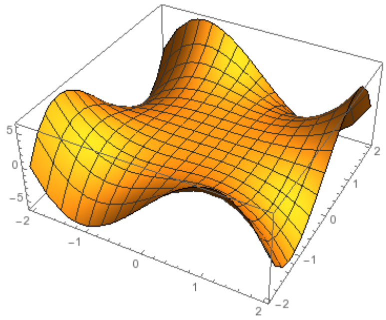
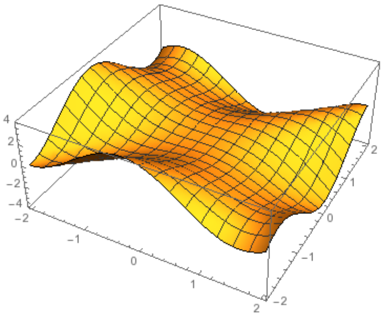
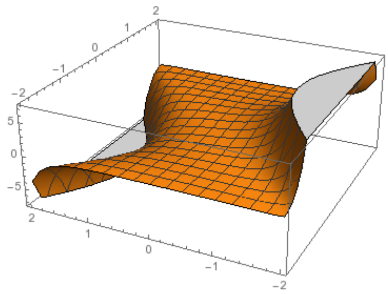
dabei handelt es sich also um eine Ellipse mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Halbachsen $\frac{\sqrt{C}}{2}$ und $\sqrt{C}$. Im Fall $C = 0$ ist die "Niveaulinie" der Ursprung.

5. Wir betrachten die folgende Liste von Funktionen:

a) $f(x,y) = \sin(x-y)(-x^2+y^2)$ **b**) $f(x,y) = (x-y)e^{-x^2+y^2}$

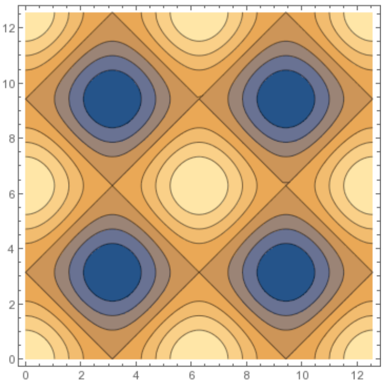
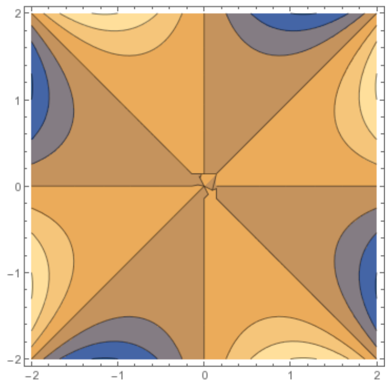
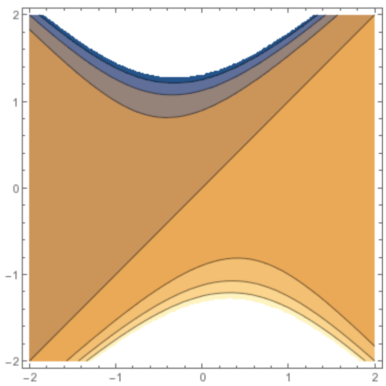
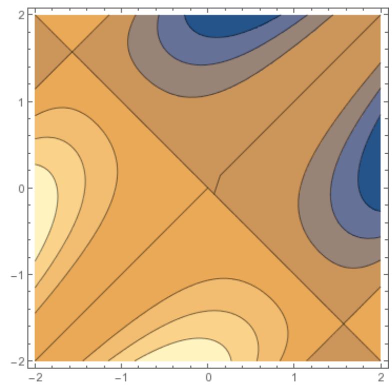
c) $f(x,y) = \cos(x) + \cos(y)$ **d**) $f(x,y) = (x^2-y^2)xy$

a) Ordne diese Funktionen den Graphen A)-D) zu.


A)

B)

C)

D)

Lösung
sh. b)

b) Ordne diese Funktionen den Niveaulinien i)-iv) zu.


i)

ii)

iii)

iv)

Lösung
In Graph A) sehen wir eine Periodizität sowohl in der $x-$ als auch in der $y-$Richtung. Dies entspricht dem Bild i) der Niveaulinien. c) ist die einzige Funktion, die sowohl

in x als auch in y periodisch ist.

Betrachten wir nun Graph B). Bei den Niveaulinien in ii) sehen wir, dass die beiden Achsen und die zwei Diagonalen die Null-Niveaulinien sind. Wenn wir die Funktion d) faktorisieren,

$$f(x,y) = (x^2 - y^2)xy = (x+y)(x-y)xy,$$

dann entspricht das genau dieser Situation.

Betrachten wir nun Graph D). In der Abbildung iii) sehen wir, dass nur die Ursprungsgerade $x = y$ eine Null-Niveaulinie ist. Die Funktion b) hat ebenfalls nur die Gerade $x = y$ als Null-Niveaulinie.

Betrachten wir nun Graph C). Per Ausschlussverfahren können hier nur iv) und a) richtig sein.

6. Ein Kreisel werde erzeugt durch Rotieren der Funktion

$$f(x) = x^{\frac{3}{5}}, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

um die y-Achse. Die Massenverteilung innerhalb des Kreisels sei beschrieben durch die Dichte

$$\varrho(y) = 2 - y, \qquad 0 \leq y \leq 1.$$

a) Berechne die Gesamtmasse des Kreisels.

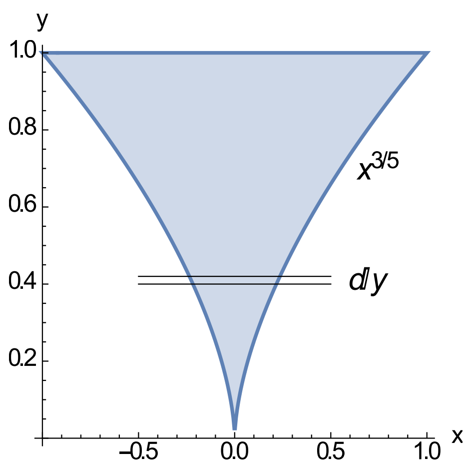
Lösung

Die Funktion $f\colon [0,1] \to [0,1]$ ist bijektiv; ihre Umkehrfunktion ist gegeben durch

$$f^{-1}(y) = y^{\frac{5}{3}}, \qquad 0 \leq y \leq 1.$$

Schneidet man aus dem Kreisel eine infinitesimal dünne Scheibe von der Dicke dy heraus, so hat diese die Masse

$$\mathrm{d}m = \varrho(y)\pi(f^{-1}(y))^2 \, \mathrm{d}y.$$



Die Gesamtmasse M ergibt sich durch Integration über die Höhe des Kreisels:

$$\begin{aligned} M &= \int_{y=f(0)}^{y=f(1)} \mathrm{d}m = \pi \int_0^1 (f^{-1}(y))^2 \varrho(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \pi \int_0^1 y^{\frac{10}{3}}(2-y)\,\mathrm{d}y = \pi \int_0^1 \left(2y^{\frac{10}{3}} - y^{\frac{13}{3}}\right)\,\mathrm{d}y \\ &= \pi \left[2 \cdot \frac{3}{13} y^{\frac{13}{3}} - \frac{3}{16} y^{\frac{16}{3}}\right]_0^1 = \pi \left(2 \cdot \frac{3}{13} - \frac{3}{16}\right) = \frac{57}{208}\pi. \end{aligned}$$

b) Auf welcher Höhe liegt der Schwerpunkt?

Lösung

Aus Symmetriegründen muss der Schwerpunkt auf der y-Achse liegen. Seine Berechnung reduziert sich also auf die Bestimmung der y-Komponente y_S. Für die Höhe y_S des Schwerpunktes ist folgende Gleichung erfüllt:

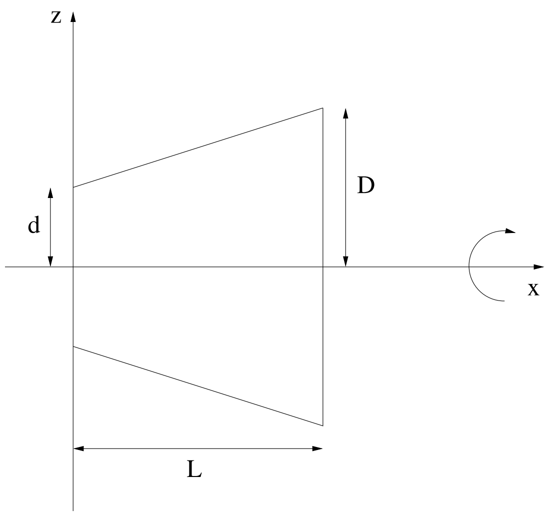
$$y_S \cdot M = \int_{y=0}^{y=1} y\,\mathrm{d}m.$$

Damit können wir y_S folgendermassen berechnen:

$$\begin{aligned} y_S &= \frac{\pi}{M} \int_0^1 y(f^{-1}(y))^2 \varrho(y)\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{M} \int_0^1 y \cdot y^{\frac{10}{3}}(2-y)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{\pi}{M} \int_0^1 \left(2y^{\frac{13}{3}} - y^{\frac{16}{3}}\right)\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{M}\left[2 \cdot \frac{3}{16} y^{\frac{16}{3}} - \frac{3}{19} y^{\frac{19}{3}}\right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{M}\left(2 \cdot \frac{3}{16} - \frac{3}{19}\right) = \frac{208}{57} \cdot \frac{33}{152} = \frac{286}{361} \approx 0.792. \end{aligned}$$

7. Prüfungsaufgabe HS 1994:

Bestimme den Schwerpunkt der homogenen konischen Welle (Rotationsachse = x-Achse) der untenstehenden Figur.



Lösung
Aus Symmetriegründen liegt der Schwerpunkt auf der x-Achse; damit gilt

$$y_S = z_S = 0.$$

Die Strecke, welche die Welle im ersten Quadranten begrenzt, ist gegeben durch $z = d + \frac{D-d}{L}x$ für $0 \leq x \leq L$. Dies erhalten wir aus dem Ansatz $z(x) = ax + b$ und den beiden gegebenen Werten $z(0) = d$ und $z(L) = D$.
Die Kraftdichte oder die Fläche einer infinitesimalen Scheibe ist also gleich $G(x) = \pi(d + \frac{D-d}{L}x)^2$. Für x_S erhalten wir damit die Gleichung

$$x_S \int_0^L G(x)\,dx = \int_0^L x \cdot G(x)\,dx.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\int_0^L G(x)\,dx &= \int_0^L \pi \left(d + \frac{D-d}{L}x\right)^2 dx = \frac{\pi}{3}\frac{L}{D-d}\left[\left(d + \frac{D-d}{L}x\right)^3\right]_0^L \\ &= \frac{\pi}{3}\frac{L}{D-d}\Big((d+D-d)^3 - d^3\Big) = \frac{\pi}{3}\frac{D^3-d^3}{D-d}L \\ &= \frac{\pi}{3}(D^2 + Dd + d^2)L.\end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}\int_0^L x\,G(x)\,dx &= \int_0^L \pi x \left(d + \frac{D-d}{L}x\right)^2 dx \\ &= \pi \int_0^L xd^2 + 2d\frac{D-d}{L}x^2 + \left(\frac{D-d}{L}\right)^2 x^3\,dx \\ &= \pi \left[d^2\frac{x^2}{2} + 2d\frac{D-d}{L}\frac{x^3}{3} + \frac{(D-d)^2}{L^2}\frac{x^4}{4}\right]_0^L \\ &= \pi \left(d^2\frac{L^2}{2} + 2d\frac{D-d}{L}\frac{L^3}{3} + \frac{(D-d)^2}{L^2}\frac{L^4}{4}\right) \\ &= \pi L^2 \left(\frac{d^2}{2} + \frac{2}{3}d(D-d) + \frac{1}{4}(D-d)^2\right) \\ &= \ldots = \frac{\pi L^2}{12}(3D^2 + 2Dd + d^2).\end{aligned}$$

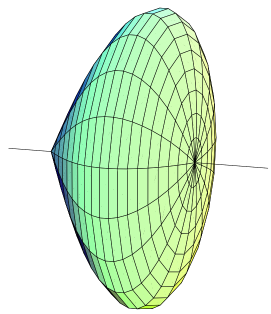
Es folgt

$$x_S = \frac{3D^2 + 2Dd + d^2}{4(D^2 + Dd + d^2)}L.$$

8. Das Flächenstück zwischen der x-Achse und dem durch die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos t \\ y(t) &= \sin(2t) \end{aligned} \qquad (\text{für } 0 \leq t \leq \tfrac{\pi}{2})$$

gegebenen Kurvenbogen wird um die x-Achse rotiert. Dadurch entsteht ein zwiebelförmiger, homogener Körper. Berechne das Trägheitsmoment bezüglich der x-Achse.



Lösung
Wir bestimmen zuerst eine explizite Darstellung der Kurve. Es ist

$$y = \sin(2t) = 2\sin t \cos t = 2x\sqrt{1-x^2}$$

(ein Stück einer Lemniskate bzw. Lissajous-Figur). Das Trägheitsmoment berechnet sich dann gemäss Buch, Kapitel III.12, wie folgt:

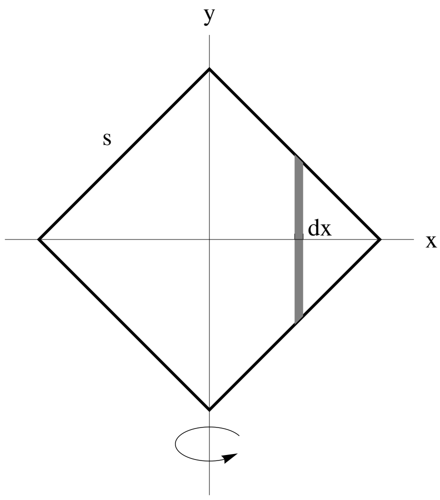
$$\begin{aligned}\Theta &= \frac{1}{2}\pi\int_0^1 \left(2x\sqrt{1-x^2}\right)^4 dx = \frac{\pi}{2}\int_0^1 16x^4(1-x^2)^2\,dx \\ &= 8\pi\int_0^1 \left(x^4 - 2x^6 + x^8\right) dx = 8\pi\left[\frac{x^5}{5} - 2\frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9}\right]_0^1 \\ &= 8\pi\Big(\frac{1}{5} - \frac{2}{7} + \frac{1}{9}\Big) = \frac{64\pi}{315}.\end{aligned}$$

Alternative: Das Trägheitsmoment einer dünnen Kreisscheibe mit Radius r ist $\frac{1}{2}\pi r^4$. Zerschneiden wir die Zwiebel in solche Scheiben vom Radius $y(t)$ und Dicke $dx = \dot{x}(t)dt$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\Theta &= \frac{1}{2}\pi\int_0^{\pi/2} y(t)^4|\dot{x}(t)|\,dt = \frac{1}{2}\pi\int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin^4(2t)}_{= 16\cos^4 t\sin^4 t = 16\cos^4 t\,(1-\cos^2 t)^2} \sin t\,dt \\ &= 8\pi\int_0^{\pi/2} \cos^4 t\,(1-\cos^2 t)^2 \sin t\,dt \\ &\underset{du=-\sin t dt}{\overset{u=\cos t}{=}} 8\pi\int_1^0 u^4(1-u^2)^2\,(-1)\,du = 8\pi\Big(\frac{1}{5} - \frac{2}{7} + \frac{1}{9}\Big) = \frac{64\pi}{315}.\end{aligned}$$

9. Eine dünne homogene Quadratplatte (Länge der Quadratseite s, Masse pro Flächeneinheit σ) rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine Diagonale. Wie gross ist die kinetische Energie T der Platte?

Lösung
Für die in der Zeichnung oben rechts liegende Kante der Platte gilt die Gleichung $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\,s - x$ (für $0 \le x \le \frac{s}{\sqrt{2}}$).



In einem Streifen der Breite dx liegt also die kleine Masse

$$dm = 2y\sigma\, dx = 2\sigma \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\, s - x \right) dx.$$

Daraus erhält man als Anteil der kinetischen Energie

$$dT = \frac{1}{2}\, v^2\, dm = \frac{1}{2}\, \omega^2 x^2\, dm = \sigma\omega^2 x^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\, s - x \right) dx.$$

Die gesamte kinetische Energie ist folglich

$$T = 2 \int_0^{\frac{s}{\sqrt{2}}} \sigma\omega^2 x^2 \left(\frac{s}{\sqrt{2}} - x \right) dx = 2\sigma\omega^2 \left[\frac{s}{\sqrt{2}}\, \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^{\frac{s}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{24}\, \sigma\omega^2 s^4.$$

Den Faktor 2 benötigen wir, um auch die linke Hälfte der Platte zu berücksichtigen.

10. Berechne die folgenden uneigentlichen Integrale, sofern sie existieren.

a) $\displaystyle\int_0^8 (8-x)^{-\frac{1}{3}}\, dx;$

Lösung

Wir können das Integral direkt berechnen und betrachten danach den durch die Schranken gegebenen Grenzwert:

$$\begin{aligned} \int_0^8 (8-x)^{-\frac{1}{3}}\, d &= \lim_{\xi \to 8} \left[-\frac{3}{2}(8-x)^{\frac{2}{3}} \right]_0^{\xi} = \lim_{\xi \to 8} -\frac{3}{2} \left((8-\xi)^{\frac{2}{3}} - 8^{\frac{2}{3}} \right) \\ &= -\frac{3}{2}(0-4) = 6. \end{aligned}$$

b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x+x^3}\,dx;$

Lösung

Wir führen eine Partialbruchzerlegung durch. Der Nenner faktorisiert sich zu $x(x^2+1)$, wobei der Faktor x^2+1 keine reellen Nullstellen besitzt. Der korrekte Ansatz für die Partialbruchzerlegung lautet daher

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B+Cx}{x^2+1}.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $x(x^2+1)$, so ergibt sich

$$1 = A(x^2+1) + (B+Cx)x,$$

ein kurzer Koeffizientenvergleich ergibt also $A=1$, $B=0$, $C=-1$ und damit

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{x+x^3}\,dx &= \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx - \int_1^\infty \frac{x}{x^2+1}\,dx \\
&= \lim_{\xi\to\infty}\left[\log|x| - \frac{1}{2}\log|x^2+1|\right]_1^\xi \\
&= \lim_{\xi\to\infty}\log\left|\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+1}}\right| - \left(\log(1) - \frac{1}{2}\log(2)\right) \\
&= \lim_{\xi\to\infty}\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\xi^2}}}\right) + \frac{1}{2}\log(2) \\
&= \log(1) + \frac{1}{2}\log(2) = \frac{1}{2}\log(2).
\end{aligned}$$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}};$

Lösung

Wir substituieren $u = x^2$, so dass $du = 2x\,dx$ und

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}} &= \lim_{\xi\to\infty}\int_0^\xi \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}} = \lim_{\xi\to\infty}\int_0^{\xi^2} \frac{du}{2\sqrt{1+u^2}} \\
&= \lim_{\xi\to\infty}\left[\frac{1}{2}\operatorname{arsinh} u\right]_{u=0}^{u=\xi^2} = \frac{1}{2}\lim_{\xi\to\infty}\operatorname{arsinh}\xi^2.
\end{aligned}$$

Wegen $\lim_{\xi\to\infty}\operatorname{arsinh}\xi^2 = \infty$ existiert das uneigentliche Integral nicht.

d) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x\log x}$;

Lösung

Das Integral

$$\begin{aligned}\int_2^\infty \frac{dx}{x\log x} &= \lim_{\xi\to\infty}\int_2^\xi \frac{\frac{1}{x}dx}{\log x} = \lim_{\xi\to\infty}\Big[\log\big(|\log x|\big)\Big]_{x=2}^{x=\xi}\\ &= \lim_{\xi\to\infty}\left(\log(\log\xi)-\log(\log 2)\right)\end{aligned}$$

existiert nicht, denn

$$\lim_{\xi\to\infty}\log(\log\xi)=\infty.$$

e) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x(\log x)^2}$;

Lösung

Die Substitution $u=\log x$ ergibt $du=\frac{dx}{x}$, also

$$\begin{aligned}\int_2^\infty \frac{dx}{x(\log x)^2} &= \lim_{\xi\to\infty}\int_2^\xi \frac{dx}{x(\log x)^2} = \lim_{\xi\to\infty}\int_{\log 2}^{\log\xi}\frac{du}{u^2} = \lim_{\xi\to\infty}\left[-\frac{1}{u}\right]_{u=\log 2}^{u=\log\xi}\\ &= \lim_{\xi\to\infty}\left[-\frac{1}{\log\xi}+\frac{1}{\log 2}\right] = \frac{1}{\log 2}.\end{aligned}$$

f) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\lambda^2+x^2}\,dx$, wobei $\lambda>0$.

Lösung

Es ist

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\lambda^2+x^2}\,dx &= \frac{1}{\lambda^2}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2}\,dx \overset{(*)}{=} \frac{1}{\lambda}\int\frac{1}{1+u^2}\,du\\ &= \frac{1}{\lambda}\arctan u + C = \frac{1}{\lambda}\arctan\left(\frac{x}{\lambda}\right)+C,\end{aligned}$$

in $(*)$ haben wir dabei $u=\frac{x}{\lambda}$ substituiert, wobei $dx=\lambda\,du$. Bekannterweise gilt für die Arkustangens-Funktion

$$\lim_{\xi\to\infty}\arctan\xi=\frac{\pi}{2}\ \text{ und }\ \arctan(-\xi)=-\arctan\xi,$$

insgesamt ergibt sich also

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty\frac{1}{\lambda^2+x^2}\,dx &= \lim_{\xi\to\infty}\int_{-\xi}^\xi\frac{1}{\lambda^2+x^2}\,dx = \frac{1}{\lambda}\lim_{\xi\to\infty}\left[\arctan\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right]_{-\xi}^{\xi}\\ &= \frac{1}{\lambda}\lim_{\xi\to\infty}\left(\arctan\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)-\arctan\left(\frac{-\xi}{\lambda}\right)\right)\\ &= \frac{2}{\lambda}\lim_{\xi\to\infty}\arctan\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) = \frac{2}{\lambda}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{\lambda}.\end{aligned}$$

g) Man finde den Wert für die Konstante K, für welchen das Integral

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{K}{x+2} \right) dx$$

konvergiert und berechne in diesem Fall das Integral.

Hinweis: Benutze die Identität $\operatorname{arsinh}(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$.

Lösung

Zunächst folgt mit der Substitution $u = \frac{x}{2}$ mit $2\,du = dx$, dass

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\,du = \operatorname{arsinh}(u) \\
&= \log(u + \sqrt{u^2+1}) + C = \log\left(\frac{x}{2} + \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} \right) + C \\
&= \log\left(\frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2+4} \right) \right) + C \\
&= \log\left(\frac{1}{2} \right) + \log\left(x + \sqrt{x^2+4} \right) + C \\
&= \log\left(x + \sqrt{x^2+4} \right) + D,
\end{aligned}$$

wobei $D = C + \log\left(\frac{1}{2}\right)$. Es folgt also

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{K}{x+2} \right) dx &= \lim_{\xi\to\infty} \int_0^\xi \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{K}{x+2} \right) dx \\
&= \lim_{\xi\to\infty} \left[\log\left(x + \sqrt{x^2+4} \right) - K \log(|x+2|) \right]_0^\xi \\
&= \lim_{\xi\to\infty} \left(\log\left(\xi + \sqrt{\xi^2+4} \right) - K\log(\xi+2) + (K-1)\log 2 \right) \\
&= \lim_{\xi\to\infty} \left(\log\left(\frac{\xi + \sqrt{\xi^2+4}}{(\xi+2)^K} \right) + (K-1)\log 2 \right).
\end{aligned}$$

Zur Berechnung des Grenzwerts beachten wir $\xi + \sqrt{\xi^2+4} \sim 2\xi$ und $(\xi+2)^K \sim \xi^K$ asymptotisch für $\xi \to \infty$; also

$$\frac{\xi + \sqrt{\xi^2+4}}{(\xi+2)^K} \sim \frac{2\xi}{\xi^K} = 2\xi^{1-K} \quad (\xi \to \infty).$$

- Wenn $K < 1$ ist, dann gilt $\xi^{1-K} \xrightarrow{\xi\to\infty} \infty$ und damit auch $\lim_{\xi\to\infty} \frac{\xi+\sqrt{\xi^2+4}}{(\xi+2)^K} = \infty$. Daher konvergiert das Integral in diesem Fall nicht.

- Wenn $K > 1$ ist, dann gilt $\xi^{1-K} \xrightarrow{\xi\to\infty} 0$ und damit auch $\lim_{\xi\to\infty} \frac{\xi+\sqrt{\xi^2+4}}{(\xi+2)^K} = 0$ und somit ist

$$\lim_{\xi\to\infty} \log\left(\frac{\xi + \sqrt{\xi^2+4}}{(\xi+2)^K} \right) = -\infty.$$

Das Integral konvergiert ebenfalls nicht.

- Wenn $K = 1$ ist, dann ist

$$\lim_{\xi \to \infty} \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 + 4}}{\xi + 2} = \lim_{\xi \to \infty} \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\xi^2}}}{1 + \frac{2}{\xi}} = 2.$$

Deshalb konvergiert in diesem Fall das Integral und es gilt

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} - \frac{K}{x + 2} \right) dx \stackrel{K=1}{=} \log \left(\lim_{\xi \to \infty} \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 + 4}}{\xi + 2} \right) = \log 2.$$

Abgabe der schriftlichen Aufgaben am Mittwoch, 16. Dezember 2015 in den Schnellübungen. Die Multiple-Choice-Aufgaben sind online einzureichen.