Lösung: Serie 2

1. ☐ Die Funktion f ist gerade.

   ☑ Die Funktion f ist ungerade.

   ☐ Die Funktion f ist weder gerade noch ungerade.

   Die Funktion f ist ungerade, da für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x).$$

2. ☐ Die Funktion $f + g$ ist ungerade.

   ☐ Die Funktion $f - g$ ist ungerade.

   ☑ Die Funktion $f \cdot g$ ist ungerade.

   ☐ Die Funktion f/g ist gerade.

   Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
(f+g)(-x) &= f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f+g)(x) \implies f+g \text{ ist ungerade,}\\
(f-g)(-x) &= f(-x) - g(-x) = -f(x) + g(x) = -(f-g)(x) \implies f-g \text{ ist ungerade,}\\
(f\cdot g)(-x) &= f(-x)\cdot g(-x) = (-f(x))\cdot(-g(x)) = (f\cdot g)(x) \implies f\cdot g \text{ ist gerade und}\\
(f/g)(-x) &= \frac{f(-x)}{g(-x)} = \frac{-f(x)}{-g(x)} = (f/g)(x) \implies f/g \text{ ist gerade.}
\end{aligned}$$

   Also ist nur die dritte Antwort richtig.

3. ☐ f ist stetig.

   ☑ f ist stetig in 0.

   ☐ f ist stetig in 1.

   Option 1: Falsch. Die Funktion f ist nicht stetig in 1. (Siehe unten.)
   Option 2: Richtig. Es gilt

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0$$

   und

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0.$$

   Die Grenzwerte stimmen überein, also ist die Funktion bei 0 stetig.

Option 3: Falsch. Es gilt

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x = 1$$

und

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

Die Grenzwerte stimmen nicht überein. Folglich ist die Funktion bei 1 unstetig.

4. ☐ $a = 4$

☐ Ein solches a gibt es nicht.

☐ $a = 1$

☑ $a = \frac{1}{4}$

☐ Für jedes a.

Für die Stetigkeit muss $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = a$ gelten. Für $x \neq 1$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x-1}{x^4-1} = \frac{x-1}{(x^2)^2-1} = \frac{x-1}{(x^2-1)(x^2+1)} \\ &= \frac{x-1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}, \end{aligned}$$

und es folgt $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{(1+1)(1^2+1)} = \frac{1}{4}$. Die andere reelle Nullstelle des Nenner bei $x = -1$ brauchen wir nicht zu beachten, da wir bei der Limesbestimmung nur x in einer kleinen Umgebung von 1 betrachten.

5. ☐ um eine additive Konstante.

☐ um eine multiplikative Konstante.

☑ durch eine Stauchung oder Streckung in Richtung der x-Achse.

☐ nur durch das Vorzeichen.

Es gilt

$$b^x = (e^{\ln b})^x = (e^{(\ln a \cdot \ln b)/\ln a})^x = (e^{\ln a})^{(\ln b/\ln a)x} = a^{(\ln b/\ln a)x},$$

d.h.

$$f_b(x) = f_a((\ln b/\ln a)x).$$

Die Funktion f_b ist also die Komposition von f_a mit der durch $x \mapsto (\ln b/\ln a)x$ definierten Funktion, und letztere ist eine Streckung oder Stauchung der x-Achse (je nachdem, ob $b > a$ oder $a > b$ gilt). Also ist die dritte Option richtig.
Die anderen Optionen sind falsch.

6.a) Beachte zunächst, dass $x-1>0$ für $x>1$ und $x-1<0$ für $x<1$. Dies führt zu unterschiedlichen Resultaten, wenn wir den linken und den rechten Grenzwert gegen 1 berechnen.

- $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-1}{|x-1|} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} x+1 = 2$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-1}{|x-1|} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-1}{-(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1^-} \big(-(x+1)\big) = -2$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-1}{|x-1|} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to +\infty} x+1$ kein Grenzwert

Bemerkung: Die Funktion ist im Punkt $x=1$ also nicht stetig.

b) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Daraus folgt, dass ebenso

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = 1 = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(x^2)}{x^2}$$

gilt (da $x^2>0$ egal ob $x>0$ oder $x<0$). Wir rechnen also

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^2(1+2x)} \sin\left(x^2\right)\right) &= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{1+2x} \cdot \frac{\sin\left(x^2\right)}{x^2}\right)\\ &= \left(\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+2x}\right) \cdot \left(\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin\left(x^2\right)}{x^2}\right) = 1.\end{aligned}$$

Für den linken Grenzwert ist die Rechnung identisch mit dem selben Resultat.
Bemerkung: Die Funktion ist im Punkt $x=0$ also stetig.

c) Beachte zunächst, dass $\sin x>0$ für $x>0$ in der Nähe von 0; und $\sin x<0$ für $x<0$ in der Nähe von 0. Die Quadratwurzel ist ausserdem immer positiv. Wir erhalten also:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{\sqrt{\sin^2 x}}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|\sin x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{\sqrt{\sin^2 x}}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|\sin x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-\sin x}{x} = -1$

Bemerkung: Die Funktion ist im Punkt $x=0$ also nicht stetig.

7.a) Wir kürzen zuerst und setzen dann ein:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x} &= \lim_{x\to 0} \frac{x(4x^2-2x+1)}{x(3x+2)} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^2-2x+1}{3x+2}\\ &= \frac{\lim_{x\to 0}\left(4x^2-2x+1\right)}{\lim_{x\to 0}(3x+2)} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

b) Hier erweitern wir geschickt, um eine binomische Formel anwenden zu können:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1+x-(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = 1.
\end{aligned}$$

c) Um zu kürzen, müssen wir erst faktorisieren:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20} &= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-10)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{x-10} = \frac{\lim_{x\to 2}(x-3)}{\lim_{x\to 2}(x-10)} = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

d) Wir bringen den Bruch auf einen gemeinsamen Nenner und kürzen:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right) &= \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)}\right) \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{1+x+x^2-3}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim_{x\to 1} \left(-\frac{x+2}{1+x+x^2}\right) \\
&= -1.
\end{aligned}$$

e) Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan x &= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x} \sin x \\
&\overset{(*)}{=} \lim_{y\to 0} \frac{-y}{\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)} \sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right) \overset{(**)}{=} \lim_{y\to 0} \frac{-y}{-\sin y} \cos y \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{\sin y}{y}} \cdot \lim_{y\to 0} \cos y = \frac{1}{\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y}} \cdot \lim_{y\to 0} \cos y = 1 \cdot 1 = 1.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir im Schritt $(*)$ den Koordinatenwechsel $x = y + \frac{\pi}{2}$ vorgenommen. Im Schritt $(**)$ haben wir bekannte, trigonometrische Identitäten verwendet.

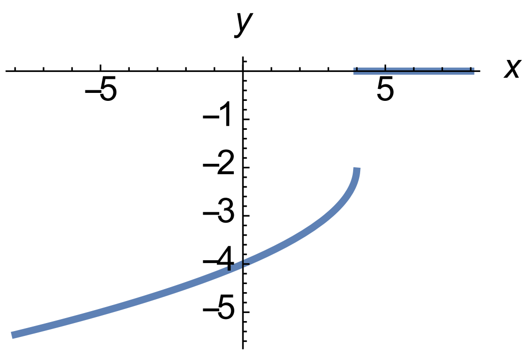
8. Das Polynom $p_x(y) = y(y^2+4y+x)$ hat die Nullstellen

$$y_1 = 0, \quad y_{2,3} = -2 \pm \sqrt{4-x}.$$

Die beiden zweiten sind nur reell, falls $x \leq 4$. Die kleinste Nullstelle von p_x ist also gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} -2-\sqrt{4-x} & \text{falls } x \leq 4 \\ 0 & \text{falls } x > 4. \end{cases}$$

Die Funktion f ist nicht stetig bei $x = 4$, denn es gilt $\lim_{x\to 4^-} f(x) = -2$ und $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 0$.



9. Sei $T : \ [0,\ 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion, die einen Punkt auf dem Äquator mit geographischer Länge θ auf seine Temperatur $T(\theta)$ abbildet. Es ist klar, dass $T(0) = T(2\pi)$. Sei $v : [0,\ \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ die Temperaturdifferenz antipodischer Punkte, die wie folgt definiert wird:

$$v(\theta) := T(\theta + \pi) - T(\theta).$$

Die Funktion v ist stetig, denn sie entsteht aus stetigen Operationen mit T, und

$$v(\pi) = T(2\pi) - T(\pi) = T(0) - T(\pi) = -\left(T(\pi) - T(0)\right) = -v(0).$$

Wenn $v(0) = 0$, dann ist $T(0) = T(\pi)$ und das Ergebnis folgt. Sollte $v(0) \neq 0$ sein, dann haben $v(\pi)$ und $v(0)$ unterschiedliche Vorzeichen. Dank des Zwischenwertsatzes ist die Existenz eines $\theta_0 \in [0,\ \pi]$ garantiert, wofür $v(\theta_0) = 0$ ist. Daraus folgt, dass $T(\theta_0) = T(\theta_0 + \pi)$: diese zwei Punkte auf dem Äquator haben also dieselbe Temperatur.

10.
- $f_0 : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$
  Diese Funktion ist gerade, es gilt $f_0(0) = 1$, $f_0(\pm 1) = \frac{1}{2}$, und $\lim_{x\to\pm\infty} f_0(x) = 0$, aber $f_0(x)$ ist immer positiv; daraus kann man bereits eine grobe Skizze des Graphen machen.
- $f_1 : x \mapsto \frac{1}{9x^2+1} = \frac{1}{(3x)^2+1} = f_0(3x)$
  Skalierung um ein Drittel in Richtung x-Achse.
- $f_2 : x \mapsto \frac{8}{x^2+4} = \frac{2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} = 2f_0\left(\frac{x}{2}\right)$.
  Skalierung um 2 in Richtung x-Achse und um 2 in Richtung y-Achse.
- $f_3 : x \mapsto \frac{1}{x^2-2x+2} = \frac{1}{(x-1)^2+1} = f_0(x-1)$
  Translation des Graphen von f_0 um eine Einheit nach rechts.
- $f_4 : x \mapsto \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{1}{\frac{1+x^2}{x^2}} = \frac{1}{(\frac{1}{x})^2+1} = f_0(\frac{1}{x})$.
  Es gilt aber auch $f_4(x) = \frac{x^2+1-1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1} = -f_0(x) + 1$, also entsteht

der Graph von f_4 durch Spiegelung an der x-Achse und anschliessender Verschiebung um 1 nach oben.

- $f_5 : x \mapsto \frac{1}{4}(x^2+4) = \frac{1}{4}x^2 + 1 = (\frac{x}{2})^2 + 1 = \frac{1}{f_0(\frac{x}{2})}$.
  Inversion bei $x = 1$ und anschliessende Streckung mit Faktor 2 in Richtung x-Achse.
  Es handelt sich um eine Parabel mit $f_5(0) = 1$, $f_5(\pm 1) = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$, und $\lim_{x \to \pm\infty} f_5(x) = +\infty$.