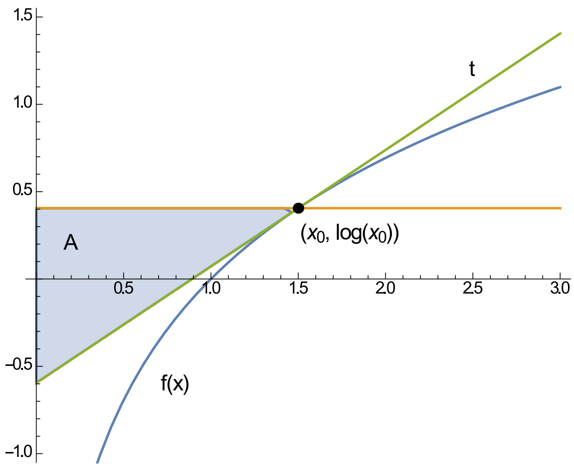
D-MAVT, D-MATL
Prof. Dr. Urs Lang

Analysis I
HS 15

Schnellübung 3

1. Es sei die Funktion $f(x) = \log x$ gegeben. Berechne in Abhängigkeit von x_0 die Fläche des Dreiecks A, wobei t die Tangente bei x_0 an den Graphen von f bezeichnet.



Lösung
Die Tangente im Punkt $(x_0, \log x_0)$ hat die Steigung $f'(x_0) = \frac{1}{x_0}$ und ist deshalb gegeben durch

$$t\colon \quad y(x) = \log(x_0) + \frac{1}{x_0} \cdot (x - x_0), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Sie schneidet die y-Achse im Punkt $y(0) = \log(x_0) - 1$.

Die Seitenlänge des Dreiecks auf der y-Achse ist gleich 1, da der Punkt auf Höhe $\log(x_0)$ liegt. Die Breite des Dreiecks ist gleich x_0, also ist die Fläche gegeben durch $\frac{x_0}{2}$.

2. Man berechne mit Hilfe der Regel von *Bernoulli-de l'Hôpital* folgende Grenzwerte:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{\tan x}$,

Lösung

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{\tan x} \overset{\text{B.H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x + \sin x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1+0}{1+0} = 1.$$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\arctan \frac{1-x}{1+x}}{x-1}$,

Lösung

Wir leiten den Zähler ab (Erinnerung: $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$) und erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan \frac{1-x}{1+x}\right) &= \frac{1}{1 + (\frac{1-x}{1+x})^2} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \\
&= \frac{1}{1 + (\frac{1-x}{1+x})^2} \cdot \frac{(-1)\cdot(1+x) - (1-x)\cdot 1}{(1+x)^2} \\
&= \frac{-2}{(1+x)^2 + (1-x)^2}.
\end{aligned}$$

Also

$$\lim_{x\to 1} \frac{\arctan \frac{1-x}{1+x}}{x-1} \overset{\text{B.H.}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-2}{(1+x)^2+(1-x)^2} = -\frac{1}{2}.$$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x\right)^2}{x\cos x - \sin x}$,

Lösung

Durch zweimalige Anwendung der Regel erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x\right)^2}{x\cos x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\left(\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x\right)\left(\frac{2\sin x}{\cos^3 x} + \sin x\right)}{-x\sin x} \\
&= \lim_{x\to 0} -\frac{2\left(\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x\right)\left(\frac{2}{\cos^3 x} + 1\right)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} -2\left(\left(\frac{2\sin x}{\cos^3 x} + \sin x\right)\left(\frac{2}{\cos^3 x} + 1\right) + \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x\right)\left(\frac{6\sin x}{\cos^4 x}\right)\right) = 0.
\end{aligned}$$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2-x+1} + \sqrt[3]{x^3+2x^2+1}\right)$.

Lösung

Wir führen die Variablentransformation $x = \frac{1}{t}$ durch, und erhalten

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2-x+1} + \sqrt[3]{x^3+2x^2+1}\right) = \lim_{t\to 0^-} \left(\sqrt{\tfrac{1}{t^2}\left(1-t+t^2\right)} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{t^3}\left(1+2t+t^3\right)}\right) \\
&= \lim_{t\to 0^-} \left(\frac{1}{-t}\sqrt{1-t+t^2} + \frac{1}{t}\sqrt[3]{1+2t+t^3}\right) = \lim_{t\to 0^-} \frac{-\sqrt{1-t+t^2} + \sqrt[3]{1+2t+t^3}}{t} \\
&= \lim_{t\to 0^-} \left(-\frac{1}{2}(-1+2t)\frac{1}{\sqrt{1-t+t^2}} + \frac{1}{3}\left(2+3t^2\right)\frac{1}{\sqrt[3]{(1+2t+t^3)^2}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}.
\end{aligned}$$

Im zweiten Schritt benutzen wir $\sqrt{t^2} = |t| = -t$ für $t < 0$ und im vierten Schritt kommt Bernoulli-de l'Hôpital zur Anwendung.

3. Bestimme das globale Maximum und das globale Minimum von

$$f(x) = \sin(2x) + 2\sin(x)$$

auf dem Intervall $[0, \pi]$.

Lösung

Die Ableitung von f ist

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2\cos(2x) + 2\cos x = 2(\cos^2 x - \sin^2 x + \cos x) \\
&= 2(\cos^2 x - (1-\cos^2 x) + \cos x) = 2(2\cos^2 x + \cos x - 1).
\end{aligned}$$

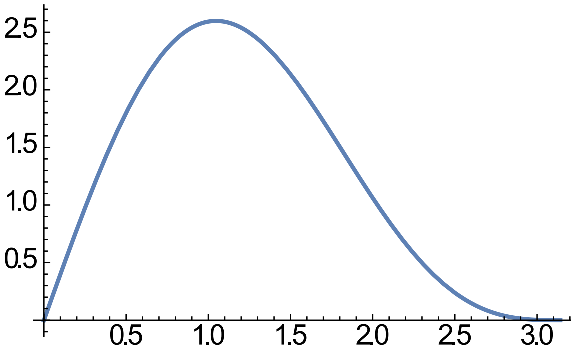
Dabei wurden die Relationen $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ und $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ benutzt. Wir setzen die Ableitung $f'(x)$ gleich null und benutzen die Substitution $y = \cos x$. Das ergibt die Gleichung $0 = 2y^2 + y - 1$, also

$$\cos x = y = \frac{-1 \pm 3}{4},$$

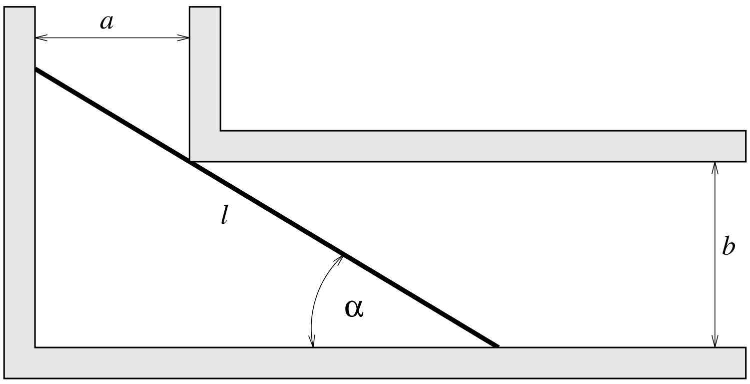
also $\cos x = \frac{1}{2}$ oder $\cos x = -1$, und daher (in unserem Intervall $[0, \pi]$) $x = \frac{\pi}{3}$ oder $x = \pi$. Die Funktionswerte von f sind

$$f(0) = 0,\ f(\tfrac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2},\ f(\pi) = 0,$$

also sind $x = 0$ und $x = \pi$ die globalen Minimalstellen zum Minimum 0, und $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ist das globale Maximum, welches bei $\frac{\pi}{3}$ angenommen wird. Diese Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f:



4. Eine Fahnenstange soll horizontal durch dieses Winkelgässchen transportiert werden. Wie lang darf die Fahnenstange höchstens sein?



Hinweis: Schreibe die Länge l der Fahnenstange als Funktion von α.

Lösung

Gemäss Geometrie im rechtwinkligen Dreieck ist $l(\alpha) = \dfrac{a}{\cos\alpha} + \dfrac{b}{\sin\alpha}$, für $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Es gilt $l(\alpha) \to \infty$ für $\alpha \to 0^+$ und für $\alpha \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$. Wir suchen das Minimum von l und leiten dazu ab:

$$l'(\alpha) = \frac{a\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{b\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \overset{!}{=} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -a\sin^3\alpha + b\cos^3\alpha = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \tan^3\alpha = \frac{b}{a} \quad \Longleftrightarrow \quad \tan\alpha = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

Also $\left(\text{mit } \cos\alpha = (1+\tan^2\alpha)^{-\frac{1}{2}} \text{ und } \sin\alpha = (1+\cot^2\alpha)^{-\frac{1}{2}}\right)$

$$\min_{0<\alpha<\frac{\pi}{2}} l(\alpha) = a\left(1+(\tfrac{b}{a})^{2/3}\right)^{1/2} + b\left(1+(\tfrac{a}{b})^{2/3}\right)^{1/2} = \left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)^{3/2}.$$