Lösung: Serie 6

1. ☐ $\operatorname{artanh} y$

☐ $\frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y}$

☐ $\log \sqrt{1+y} - \log \sqrt{1-y}$

☑ $\frac{\operatorname{arsinh} y}{\operatorname{arcosh} y}$

Der Area Tangens Hyperbolicus berechnet sich durch

$$\begin{aligned} x = \operatorname{artanh} y \quad &\Longleftrightarrow \quad y = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \\ &\Longleftrightarrow \quad y(e^{2x} + 1) = e^{2x} - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 + y = (1-y)e^{2x} \\ &\Longleftrightarrow \quad e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y}. \end{aligned}$$

Weiter gilt mit den Rechenregeln für den Logarithmus, dass

$$\frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y} = \frac{1}{2} \log(1+y) - \frac{1}{2} \log(1-y) = \log \sqrt{1+y} - \log \sqrt{1-y}.$$

Die letzte Option ist dagegen Humbug, denn aus $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ folgt natürlich keineswegs $\operatorname{artanh} x = \frac{\operatorname{arsinh} x}{\operatorname{arcosh} x}$. Dies allein deshalb schon, weil die Definitionsbereiche dieser Funktionen sehr unterschiedlich sind.

2. ☑ $e^{-1/x} = o(x^n)$ für $x \to 0^+$

☐ $e^{1/x} = o(x^{-n})$ für $x \to 0^+$

☑ $x^{-n} = o(e^{1/x})$ für $x \to 0^+$

Option 1: Richtig! Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x > 0$ ist

$$\begin{aligned} & e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \\ \iff \qquad & e^{1/x} > \frac{1}{x^{n+1}(n+1)!} \\ \iff \qquad & e^{-1/x} < (n+1)! \cdot x^{n+1}. \end{aligned}$$

Aus dieser Ungleichung ergibt sich, dass

$$0 \leq \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^n} \leq (n+1)! \lim_{x \to 0^+} x = 0.$$

Option 2: Falsch! Es gilt $e^{1/x} > \frac{1}{n! \cdot x^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x > 0$. Somit ergibt sich für den gesuchten Grenzwert, wenn er denn existiert,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{1/x}}{x^{-n}} \geq \frac{1}{n!},$$

also ist er sicher nicht Null. Für $n = 0$ kann man gleich sofort sehen, dass dieser Grenzwert nicht existiert.
Option 3: Richtig! Nach einer Variablentransformation ($y = 1/x$) ist dies äquivalent zu $y^n = o(e^y)$ für $y \to \infty$. Dieses letzte Resultat wurde in der Vorlesung bewiesen.

3. ☑ I

☐ II

☑ III

☑ IV

☐ Gar keine.

Die Bedingung $f'' < 0$ impliziert, dass die Steigung f' streng monoton fällt, also G_f eine Rechtskurve beschreibt. Mehr lässt sich nicht sagen.

4. ☑ Die Funktion f ist positiv.

☐ Die Funktion f ist negativ.

☐ Die erste Ableitung f' ist positiv.

☑ Die erste Ableitung f' ist negativ.

☑ Die zweite Ableitung f'' ist positiv.

☐ Die zweite Ableitung f'' ist negativ.

☐ Nichts!

Alle Funktionswerte sind sicher positiv, da G_f über der x-Achse liegt. In jedem Punkt ist die Steigung der jeweiligen Tangente negativ, also ist f' negativ. Der Graph beschreibt eine Linkskurve, damit muss f'' positiv sein.

5. ☐ Kreisbahn mit Mittelpunkt $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ und Radius 2, zweimaliger Umlauf im Uhrzeigersinn beginnend bei $(0, 1)$.

☐ Ellipse mit Mittelpunkt $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, vom Punkt $(0, 1)$ nach $(1, 0)$.

☐ Kreisbahn mit Mittelpunkt $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ und Radius 2, einmaliger Umlauf im Uhrzeigersinn beginnend bei $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2)$.

☐ Kreisbahn mit Mittelpunkt $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ und Radius 2, zweimaliger Umlauf gegen den Uhrzeigersinn.

☑ Kreisbahn mit Mittelpunkt $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ und Radius 2, einmaliger Umlauf gegen den Uhrzeigersinn beginnend bei $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2)$.

Wir sehen, dass die Parametrisierung $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sin 6t \\ 2\cos 6t \end{pmatrix}$ die Kreisgleichung

$$\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + y^2 = 2^2$$

eines Kreises mit Mittelpunkt $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ und Radius 2 erfüllt. Wenn wir den Startpunkt ausrechnen $(t = 0)$, sehen wir, dass

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wenn t etwas grösser als Null wird, wird die x-Koordinate zunächst kleiner (wegen des negativen Vorzeichens vor dem Sinus) und die y-Koordinate wird ebenfalls kleiner. Wir durchlaufen den also Kreis im Gegenuhrzeigersinn.
Die Parametrisierung $(\sin t, \cos t)$ des Einheitskreises durchläuft für $t \in [0, 2\pi]$ den Kreis genau einmal, also durchläuft unsere Parametrisierung den Kreis für $t \in [0, \frac{2\pi}{6}]$ auch genau einmal.

6.a) Das folgt sofort aus $\cosh x \pm \sinh x = e^{\pm x}$.
Diese letzte Gleichung zeigt ausserdem, dass $\cosh x + \sinh x$ nie Null ist und damit die Identität aus der Aufgabe immer Sinn macht.

b)
$$2\cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\left(\frac{e^{x/2} + e^{-x/2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(e^x + 2 + e^{-x}\right) = \cosh x + 1.$$

c) Wir berechnen die zweite Ableitung $\cosh''(x) = \sinh'(x) = \cosh(x)$. Nun sehen wir aber, dass $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ immer positiv ist: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist x oder $-x$ grösser gleich Null, also ist e^x oder e^{-x} grösser als 1, folglich ist $\cosh(x)$ strikt grösser als Null. Also ist $\cosh''(x) = \cosh(x) > 0$ für alle x, und damit ist cosh strikt konvex.

d) Wir betrachten wieder die zweite Ableitung: $\sinh''(x) = \cosh'(x) = \sinh(x)$. Diese ist nicht positiv, wenn

$$\begin{aligned} 0 \geq \sinh(x) = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad &\Longleftrightarrow \quad 0 \geq e^x - e^{-x} \quad \Longleftrightarrow \quad e^{-x} \geq e^x \\ &\Longleftrightarrow \quad 1 \geq e^{2x} \quad \Longleftrightarrow \quad 2x \leq \log 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq 0. \end{aligned}$$

Folglich ist sinh auf $(-\infty, 0]$ konkav.

e) Wir berechnen die erste Ableitung vom Tangens hyperbolicus zu

$$\tanh'(x) = \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\right)' = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{\cosh^2(x)},$$

wobei wir die Identität $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ ausgenutzt haben. Die zweite Ableitung ist dann

$$\tanh''(x) = \big((\cosh(x))^{-2}\big)' = -2(\cosh(x))^{-3}\cosh'(x) = -\frac{2\sinh(x)}{\cosh(x)^3}.$$

Dies ist nichtnegativ, wenn

$$\begin{aligned} 0 \leq \tanh''(x) \quad &\Longleftrightarrow \quad -2\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)^3} \geq 0 \quad \overset{\cosh \geq 0}{\Longleftrightarrow} \quad \sinh(x) \leq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e^x \leq e^{-x} \\ &\Longleftrightarrow \quad e^{2x} \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x \leq \log 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq 0, \end{aligned}$$

also ist tanh auf $(-\infty, 0]$ konvex.

Bemerkung: Man kann dies auch zeigen, wenn man die Ableitungen als $\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x)$ und $\tanh''(x) = 2\tanh^3(x) - 2\tanh(x)$ bestimmt, es ist nur etwas mühsamer.

7. Wir verwenden

$$\log x = o(x^k) \text{ für } x \to \infty, \text{ falls } k > 0 \tag{1}$$
$$x^k = o(e^x) \text{ für } x \to \infty, \tag{2}$$

um die folgenden Grenzwerte zu berechnen:

- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log\log x^2}{\log 10x^{1/2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log 2 + \log\log x}{\log 10 + \frac{1}{2}\log x}$
  $\overset{y:=\log x}{=} \lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{\log 2 + \log y}{\log 10 + \frac{1}{2}y} \overset{(1)}{=} 0.$

- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log(10\sqrt{x})}{x^{1/5}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log 10 + \frac{1}{2}\log x}{x^{1/5}} \overset{(1)}{=} 0.$

- $0 \leq \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{1/5}}{\log(e^x - x)} \overset{(*)}{\leq} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{1/5}}{\frac{1}{2}\log e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} 2x^{-4/5} = 0.$

  Bei $(*)$ haben wir benutzt, dass $\sqrt{e^x} = o(e^x - x)$.

- $0 \leq \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log(e^x - x)}{x^2} \leq \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log e^x}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} x^{-1} = 0.$

- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{e^{3x}} \overset{(2)}{=} 0.$

Mit der evidenten Notation gilt also

$$\log\log(x^2) \ll \log(10\sqrt{x}) \ll x^{\frac{1}{5}} \ll \log(e^x - x) \ll x^2 \ll e^{3x}.$$

8.a) Die Funktion $f(x) = x\sqrt{(2-x)(2+x)}$ ist nur dort definiert, wo das Argument der Wurzel nichtnegativ ist. Dazu müssen die zwei Faktoren im Argument dasselbe Vorzeichen haben, d.h.

$$\begin{aligned} & (2 - x \geq 0 \text{ und } 2 + x \geq 0) \text{ oder } (2 - x \leq 0 \text{ und } 2 + x \leq 0) \\ \iff & (x \leq 2 \text{ und } x \geq -2) \text{ oder } (x \geq 2 \text{ und } x \leq -2) \\ \iff & (x \leq 2 \text{ und } x \geq -2), \end{aligned}$$

denn der zweite Term ist ein Widerspruch. Somit ist f nur im Intervall $[-2, 2]$ definiert ($D_f = [-2, 2]$). Für die Nullstellen gilt

$$f(x) = 0 \quad\iff\quad x = 0 \text{ oder } 2-x = 0 \text{ oder } 2+x = 0 \quad\iff\quad x \in \{-2, 0, 2\}.$$

b) Die Ableitung von f ist durch die folgende Formel für alle $x \in (-2, 2)$ gegeben:

$$f'(x) = \sqrt{4 - x^2} + x\frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{4 - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{-2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

Daraus folgt:

- f hat mögliche lokale Extrema an den Stellen $x = \pm\sqrt{2}$, denn für solche x ist $f'(x) = 0$.

- Die Funktion hat positive Ableitung genau dann, wenn

$$\begin{aligned} & (x > \sqrt{2} \text{ und } x < -\sqrt{2}) \text{ oder } (x < \sqrt{2} \text{ und } x > -\sqrt{2}) \\ \Leftrightarrow\; & (x < \sqrt{2} \text{ und } x > -\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Das heisst, f ist in $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ strikt monoton wachsend.

- Da $f'(x) < 0$ für alle $x \in (-2,\, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2},\, 2)$ ist, muss f in der Menge $[-2,\, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2},\, 2]$ strikt monoton fallend sein.

Aus dem Verhalten des Vorzeichens der Ableitung ergibt sich, dass f ein lokales Maximum (bzw. ein lokales Minimum) an der Stelle $x = \sqrt{2}$ (bzw. $x = -\sqrt{2}$) besitzt.
Die Funktion $f\colon [-2,\, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig und besitzt deshalb ein globales Minimum und ein globales Maximum, weil der Definitionsbereich kompakt ist. Man bemerke, dass

$$f(-2) = f(2) = 0, \quad f(-\sqrt{2}) = -2 \text{ und } f(\sqrt{2}) = 2.$$

Somit ist 2 (bzw. -2) das globale Maximum (bzw. das globale Minimum).

c) Der Zwischenwertsatz garantiert, dass alle Werte zwischen dem Maximum und Minimum angenommen werden. Daraus folgt $W_f = [-2, 2]$.

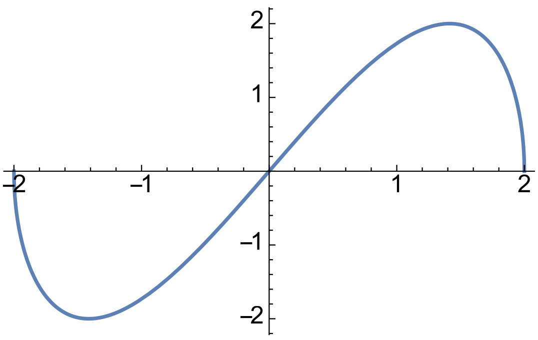
d) Die zweite Ableitung von f ist

$$f''(x) = \frac{2x(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})}{(4-x^2)^{3/2}}$$

für alle $x \in (-2,\, 2)$. Weil $\pm\sqrt{6} \notin [-2,\, 2]$, ist $f''(x) = 0$ nur an der Stelle $x = 0$. Ausserdem sind $x - \sqrt{6} < 0$ und $x + \sqrt{6} > 0$ für $x \in [-2,\, 2]$. Deshalb ist $f''(x) > 0$ (bzw. $f''(x) < 0$), wenn $x \in (-2,\, 0)$ (bzw. $x \in (0,\, 2)$) ist, und somit ist f konvex (bzw. konkav) in diesem Intervall.

Insbesondere hat f in $x = 0$ einen Wendepunkt.

e)



9. Die Kurve K ist durch die folgende Parametrisierung gegeben:

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ},$$

für $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Weiter läuft P für steigendes t auf einem Kreisbogen mit Mittelpunkt O im Uhrzeigersinn, also gilt

$$\overrightarrow{OP} = (r\cos t,\ -r\sin t).$$

Ebenso läuft Q für steigendes t auf einem Kreisbogen mit Mittelpunkt P im Gegenuhrzeigersinn, also gilt

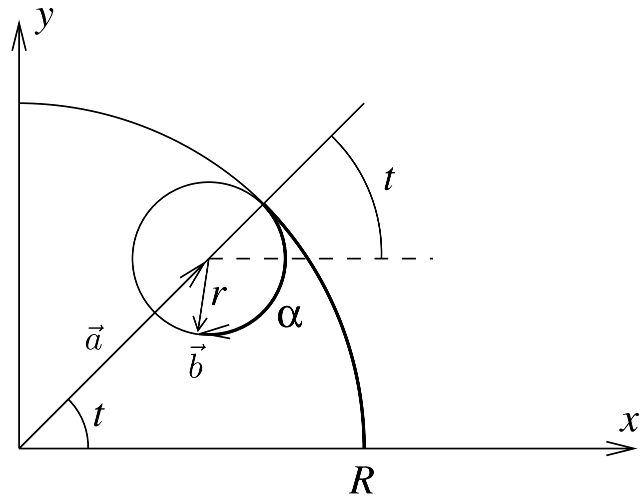
$$\overrightarrow{PQ} = ((r+b)\cos t, (r+b)\sin t).$$

Somit ist

$$\vec{r}(t) = ((2r+b)\cos t,\ b\sin t)\,.$$

Die Kurve ist die Schnittmenge einer Ellipse mit Halbachsen der Länge $2r+b$ (x-Richtung) und b (y-Richtung) und des Teils der x-y-Ebene mit $x > 0$.

10a) Die Parametrisierung einer Hypozykloide finden wir folgendermassen: Zunächst finden wir eine Parametrisierung $\vec{a}(t)$ des Mittelpunktes M des kleinen Kreises und überlegen uns danach, welcher Vektor $\vec{b}(t)$ zwischen M und P liegt. Daraus erhalten wir $\vec{r}(t) = \vec{a}(t) + \vec{b}(t)$. Wir legen fest, dass der kleine Kreis im Gegenuhrzeigersinn abrollt und mit $t \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir den Winkel (im Bogenmass), welcher M bereits zurückgelegt hat. Für $t = 0$ nehmen wir weiter an, dass P auf der x-Achse liegt.



Es ist klar, dass sich M auf einem Kreis mit Radius $R-r$ im Gegenuhrzeigersinn bewegt. Es gilt also

$$\vec{a}(t) = (R-r)\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}.$$

Aus der Geometrie des Problems ist klar, dass der (variable) Berührpunkt der beiden Kreise beim Winkel t eine Distanz von Rt zurückgelegt hat. Alle Punkte auf dem kleinen Kreis bewegen sich also relativ zu diesem Berührpunkt ebenfalls um diese Distanz im Uhrzeigersinn, also gilt für den Winkel $\alpha(t)$ zwischen P und dem (variablen) Berührpunkt

$$r\alpha(t) = Rt \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha(t) = \frac{Rt}{r}.$$

Um $\vec{b}(t)$ zu bestimmen, sind wir jedoch nicht an $\alpha(t)$ interessiert, sondern am Winkel zwischen $\vec{b}(t)$ und der Horizontalen. Wie wir aus der Skizze sehen, ist dieser Winkel gleich

$$\alpha(t) - t = \frac{Rt}{r} - t = \frac{Rt - rt}{r} = \frac{R-r}{r}\,t,$$

es ergibt sich also

$$\vec{b}(t) = r\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{R-r}{r}t\right)\\ -\sin\left(\frac{R-r}{r}t\right)\end{pmatrix}$$

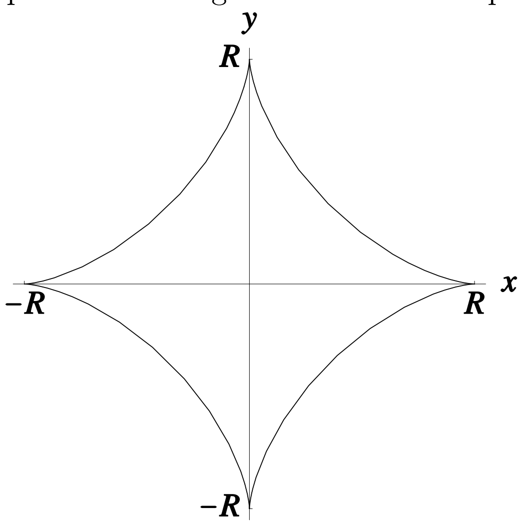
und damit

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} = \vec{a}(t) + \vec{b}(t) = (R-r)\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{R-r}{r}t\right)\\ -\sin\left(\frac{R-r}{r}t\right)\end{pmatrix}.$$

b) Einsetzen ergibt

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{R}{4}\begin{pmatrix}3\cos t + \cos 3t\\ 3\sin t - \sin 3t\end{pmatrix}.$$

Diese Kurve wird auch *Astroide* genannt, die x- und y-Achse sind die asymptotischen Tangenten in den vier Spitzen.



Bemerkung: Für $R = nr$, $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich analog

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{R}{n} \begin{pmatrix} (n-1)\cos t + \cos(n-1)t \\ (n-1)\sin t - \sin(n-1)t \end{pmatrix}.$$

Diese Kurve hat n Spitzen, welche die Eckpunkte eines regelmässigen n-Ecks bilden.

c) Einsetzen ergibt

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{R}{2} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + \frac{R}{2} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit bewegt sich P nur auf der x-Achse hin und her!