Lösung: Serie 5

1. ☐ f' hat maximal zwei Nullstellen auf $[a, b]$.

   ☐ f' hat mindestens drei Nullstellen auf $[a, b]$.

   ☑ f' hat mindestens zwei Nullstellen auf $[a, b]$.

   ☐ f' hat genau zwei Nullstellen auf $[a, b]$.

   Nach dem Mittelwertsatz (oder dem Satz von Rolle) liegt zwischen je zwei Nullstellen von f mindestens eine Nullstelle von f'. Daher hat f' mindestens zwei Nullstellen. Im Fall $f(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$ ist auch f' identisch gleich 0 auf $[a, b]$; also ist die erste und die letzte Option falsch. Ein Beispiel wie $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ mit

   $$f(x) = x^3 - 3x = x(x^2 - 3) = x(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}), \quad f(0) = f(-\sqrt{3}) = f(\sqrt{3}) = 0$$

   mit $f'(x) = 3(x^2 - 1) = 3(x + 1)(x - 1)$ zeigt, dass die Anzahl der Nullstellen von f' gleich 2 sein kann (in diesem Fall $x = -1$, $x = 1$), womit auch die zweite Option nicht immer erfüllt ist. Also ist nur die dritte Option richtig.

2. ☑ Ist f streng monoton fallend, so ist $f' < 0$ auf (a, b).

   ☐ Ist $f' = 0$, so ist f konstant.

   ☐ Ist $f' > 0$ auf (a, b), so ist f streng monoton wachsend.

   ☐ Ist f monoton wachsend, so ist $f' \geq 0$.

   Die dritte Option ist eine korrekte Aussage als direkte Folgerung aus dem Mittelwertsatz.

   Aus $f' = 0$ (d.h. $f' \geq 0$ und $f' \leq 0$) folgt ebenso, dass f monoton wachsend und monoton fallend ist, insgesamt ist f dann also konstant. Somit ist auch die zweite Option eine korrekte Aussage.

   Für die vierte Option nehmen wir widerspruchshalber an, dass es ein $a < \xi < b$ gibt mit $f'(\xi) < 0$. Also muss auch auf einem kleinen Intervall I mit $\xi \in I$ gelten, dass $f' < 0$. Also ist f auf I strikt monoton fallend, was ein Widerspruch ist. Also ist auch die vierte Option eine korrekte Aussage.

   Die erste Option ist hingegen falsch: Ist f streng monoton fallend, so folgt zwar $f' \leq 0$ auf (a, b), aber f' kann in isolierten Punkten verschwinden. Ein Beispiel dafür ist $f(x) = -x^3$ mit $f'(x) = -3x^2$. Offensichtlich ist f streng monoton fallend, jedoch gilt $f'(0) = 0$.

3. ☐ $f'(c) = 0 \Longrightarrow c$ ist eine Extremalstelle.

☑ $f'(c) = 0 \Longleftarrow c$ ist eine Extremalstelle.

☐ $f'(c) = 0 \Longleftrightarrow c$ ist eine Extremalstelle.

☐ Es gibt keinen Zusammenhang zwischen Extremalstellen und $f'(c)$.

Eine Extremalstelle c hat eine wagerechte Tangente, $f'(c) = 0$, aber nicht umgekehrt. Zum Beispiel hat $x \mapsto x^3$ einen Sattelpunkt bei $x = 0$, aber kein (lokales oder globales) Extremum.

4. ☐ nicht anwendbar, weil die beiden ersten Brüche keine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion beschreiben.

☑ auf den zweiten Bruch nicht anwendbar, weil Zähler und Nenner für $x \to 1$ nicht beide gegen 0 oder ∞ streben.

☐ nicht anwendbar, weil das Zählerpolynom jeweils einen höheren Grad als das Nennerpolynom hat.

☐ auf den ersten Bruch nicht anwendbar, weil Zähler und Nenner für $x \to 1$ nicht beide gegen 0 oder ∞ streben.

☐ durchaus anwendbar und die Überlegung richtig!

Die Regel von Bernoulli-de l'Hôpital ist anwendbar, wenn sowohl der Zähler als auch der Nenner beide gegen 0 oder beide gegen ∞ streben. Die anderen genannten Bedingungen haben auf Bernoulli-de l'Hôpital keinen Einfluss.
Für $x = 1$ gilt $x^3 + x - 2 = 0$ und $x^2 - 3x + 2 = 0$. Damit ist die Regel von Bernoulli-de l'Hôpital auf den ersten Bruch anwendbar und das erste "=" stimmt. Für den zweiten Bruch sind dagegen die Voraussetzungen nicht erfüllt, denn der Nenner hat an der Stelle 1 den Wert -1 und der Zähler den Wert 4. Vielmehr gilt:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3} = \frac{3+1}{2-3} = -4.$$

5. ☐ $\frac{28}{3}$

☐ 8

☑ 3

☐ $\frac{19}{6}$

Das Volumen der Schachtel ist als Funktion von $x \in [0,8]$ durch

$$V(x) = x(16-2x)(21-2x) = 4x^3 - 74x^2 + 336x$$

zu berechnen. Bemerke, dass $V \geq 0$ und $V(0) = V(8) = 0$ ist. Die Extrema dieser Funktion sind also, wenn sie existieren, unter den Lösungen der Gleichung $V'(x) = 0$. Die Ableitung von V ist durch

$$V'(x) = 12x^2 - 148x + 336$$

gegeben. Wir lösen nun die Gleichung $3x^2 - 37x + 84 = 0$. Es ist

$$x = \frac{37 \pm \sqrt{37^2 - 4 \cdot 3 \cdot 84}}{6} = \{3, \tfrac{28}{3}\}.$$

Man betrachtet jetzt die zweite Ableitung: $V''(x) = 24x - 148$. Da $V''(3) < 0$ ist, ist $x = 3$ ein Maximum. Der andere Wert $x = \frac{28}{3}$ liegt nicht im Intervall $[0,8]$ und ist deshalb nicht zu betrachten. Das globale Maximum ist also $x = 3$. (Die globalen Minima auf $[0,8]$ sind die Randpunkte 0 und 8, wo das Volumen 0 ist.)

6. a) Wir bringen den Term zuerst auf einen Nenner und verwenden die Regel zweimal:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x \sin x} \overset{\text{B.H.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\cos x + \sin x}$$
$$\overset{\text{B.H.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x(-\sin x) + 2\cos x} = 0.$$

b) Wir schreiben den Term um:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0}\exp\Big(\frac{1}{x^2}\log(\cos x)\Big) \overset{(*)}{=} \exp\Big(\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x^2}\Big)$$
$$\overset{\text{B.H.}}{=} \exp\Big(\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x}\Big) = \exp\Big(\lim_{x\to 0} -\frac{\tan x}{2x}\Big)$$
$$\overset{\text{B.H.}}{=} \exp\Big(\lim_{x\to 0} -\frac{1+\tan^2 x}{2}\Big) = \exp\big(-\tfrac{1}{2}\big) = e^{-\frac{1}{2}}.$$

Bei $(*)$ haben wir verwendet, dass die Exponentialfunktion stetig ist, um den Grenzwert hineinzuziehen.

c)
$$\lim_{x\to 0}\cot x \log(1+3x) = \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+3x)}{\tan x} \overset{\text{B.H.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{1+3x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x}{1+3x} = 3.$$

d) Achtung, hier muss man nach h ableiten und nicht nach x.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \overset{\text{B.H.}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h}$$
$$\overset{\text{B.H.}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{f''(x+h) + f''(x-h)}{2} = f''(x).$$

Bemerkung: Es gibt Funktionen, welche nicht zweimal stetig differenzierbar sind, für welche der gesuchte Grenzwert aber trotzdem existiert (Beispiel: $f(x) = x \cdot |x|$).

7.a) Wenn $x \neq 0$, dann folgt aus den bekannten Rechenregeln, dass h an der Stelle x differenzierbar ist. In diesem Fall gilt $h'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.
An der Stelle $x = 0$ ist h auch differenzierbar über den Differentialquotienten:

$$h'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(\Delta x) - h(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right) = 0,$$

wobei die letzte Gleichung gilt, denn der Sinus ist beschränkt durch 1 und damit $\left|\Delta x \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)\right| \leq |\Delta x| \to 0$ für $\Delta x \to 0$.
Die Ableitungsfunktion $h' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von h ist also

$$h'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(Beachte, dass man im Allgemeinen *nicht* einfach $f(0) = 0$ zu $f'(0) = 0$ ableiten kann!)
Die Funktion h' ist für alle $x \neq 0$ stetig, jedoch nicht an der Stelle $x = 0$, weil $\lim_{x \to 0} h'(x)$ nicht existiert: Der Term $\cos(\frac{1}{x})$ schwingt für $x \to 0$ zwischen -1 und 1 hin und her, nähert sich aber keinem Wert an.

b) Mit Hilfe des Hinweises erraten wir die Asymptote: Die Funktion $\sin \frac{1}{x}$ wird durch $\frac{1}{x}$ gut approximiert für $x \to \pm\infty$, da dann $\frac{1}{x} \to 0$. Also

$$h(x) = x^2 \sin \tfrac{1}{x} \approx x^2 \tfrac{1}{x} = x$$

für $x \to \pm\infty$.
Die Funktion $k : x \longmapsto x$ ist nun tatsächlich eine Asymptote von $h(x)$ für $x \to \pm\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \pm\infty} (h(x) - k(x)) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(x^2 \sin \tfrac{1}{x} - x\right) &\overset{u=\frac{1}{x}}{=} \lim_{u \to 0^\pm} \left(\frac{1}{u^2} \sin u - \frac{1}{u}\right) \\ &= \lim_{u \to 0^\pm} \frac{\sin u - u}{u^2} \overset{\text{B.H.}}{=} \lim_{u \to 0^\pm} \frac{\cos u - 1}{2u} \\ &\overset{\text{B.H.}}{=} \lim_{u \to 0^\pm} \frac{-\sin u}{2} = 0. \end{aligned}$$

8. Das Maximum auf dem Intervall $[a, b]$ wird entweder am Rand angenommen, also in a oder b, oder in einem kritischen Punkt (d.h. $f'(x) = 0$).
Wir suchen zuerst lokale Maxima von f auf ganz $\mathbb{R}$. Man hat

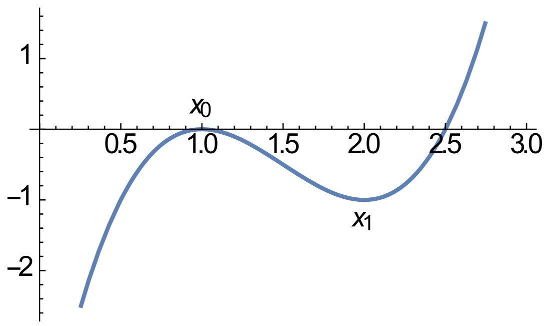
$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2),$$

also sind $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ die kritischen Punkte.
Mithilfe der ersten Ableitung sieht man, dass f auf dem Intervall $(-\infty, 1)$ strikt monoton wachsend, auf $(1, 2)$ strikt monoton fallend, und auf $(2, \infty)$ strikt monoton wachsend ist. Folglich hat f in x_0 ein lokales Maximum und in x_1 ein lokales Minimum.
Es gilt $f(x_0) = f(1) = 0$ und $f(x_1) = f(2) = -1$; wir müssen noch den Punkt rechts von x_1 finden, wo f wieder grösser als 0 ist. Mit Hilfe der Polynomdivision bekommt man

$$f(x) = (x-1)(2x^2 - 7x + 5) = 2(x-1)^2(x - \tfrac{5}{2}),$$

also ist $\frac{5}{2}$ die einzige andere Nullstelle von f.
Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

- $b \leq 1$: $\max = f(b)$
- $1 < b \leq \frac{5}{2}$ und $a \leq 1$: $\max = f(1) = 0$
- $1 < b \leq \frac{5}{2}$ und $a > 1$: $\max = \max(f(a), f(b))$
- $b > \frac{5}{2}$: $\max = f(b)$



9. Der Ortsvektor ist $\overrightarrow{OP} = \binom{x}{\sqrt{x}}$ und der Tangentialvektor ist $\overrightarrow{t_P} = \binom{1}{1/(2\sqrt{x})}$. Mit elementarer Trigonometrie berechnet sich der Winkel zu

$$\cos\alpha(x) = \cos\sphericalangle(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{t_P}) = \frac{\overrightarrow{OP} \bullet \overrightarrow{t_P}}{|\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{t_P}|} = \frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{(x^2 + x)(1 + \frac{1}{4x})}} = \frac{2x+1}{\sqrt{x+1}\sqrt{4x+1}}.$$

Dies ist offensichtlich positiv (da $x > 0$) und es gilt $\cos\alpha(x) \to 1$ für $x \to 0^+$ und für $x \to +\infty$. Folglich ist $\cos\alpha(x)$ zwischen 0 und 1, und damit liegt der (positive) Winkel α zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ (siehe Skizze). Dort ist der Kosinus strikt monoton fallend, also können wir direkt $\cos\alpha$ untersuchen:
$\alpha(x)$ ist maximal $\Longleftrightarrow$ $\cos\alpha(x)$ ist minimal $\Longleftrightarrow$ $(\cos\alpha(x))^2$ ist minimal

$$\Longleftrightarrow 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{(2\,x+1)^2}{(x+1)(4\,x+1)}\right) = \ldots = \frac{4\,x^2 - 1}{(x+1)^2(4\,x+1)^2}$$

$\Longleftrightarrow \; x = \frac{1}{2}$, wegen $x > 0$.

Also ist $x = \frac{1}{2}$ das einzige Minimum von $\cos\alpha(x)$ für $x \in (0,\infty)$. Wie oben erklärt, ist deshalb $x = \frac{1}{2}$ das globale Maximum des Winkels $\alpha(x)$, und es gilt $\cos\alpha(\frac{1}{2}) = \frac{2}{\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.
Damit ist also

$$\alpha \in \left(0, \arccos\left(\tfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right] \approx (0, 19.47°].$$

10. Die Beleuchtungsstärke einer einzelnen Lichtquelle ist gemäss der Aufgabe gegeben durch $\frac{C}{r^2}$, wobei r den Abstand zur Lichtquelle bezeichnet und C eine Konstante ist. Es sei nun die eine Lichtquelle bei $x = 0$ und die andere (die hellere) bei $x = 10$ installiert, dann ist die Helligkeit bei einem beliebigen Punkt x gegeben durch die Summe der beiden Beleuchtungsstärken.
Gesucht ist also das Minimum der Funktion

$$f\colon (0,10) \to \mathbb{R}, \quad f(x) := C\left(\frac{1}{x^2} + \frac{8}{(10-x)^2}\right),$$

wobei $C > 0$ eine Konstante ist. Für $x \in (0,10)$ gilt

$$f'(x) = 2C\left(-\frac{1}{x^3} + \frac{8}{(10-x)^3}\right).$$

Wir lösen die Gleichung $f'(x) = 0$:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{x^3} + \frac{8}{(10-x)^3} = 0 \quad &\iff \quad \frac{8}{(10-x)^3} = \frac{1}{x^3} \\ &\iff \quad \frac{\sqrt[3]{8}}{10-x} = \frac{1}{x} \\ &\iff \quad 2x = 10 - x, \end{aligned}$$

also ist die einzige Lösung $x_0 = \frac{10}{3}$.
Um zu überprüfen, ob dieser Punkt tatsächlich ein Minimum ist, können wir die beiden Endpunkte einsetzen und sehen $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty = \lim_{x\to 10} f(x)$; also ist f links und rechts von x_0 grösser. Alternativ kann man sich auch von folgendem überzeugen: für $x < \frac{10}{3}$ ist $f'(x) < 0$ und für $x > \frac{10}{3}$ ist $f'(x) > 0$; also ist x_0 das gesuchte Minimum.