Serie 8

1. Es seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $|z_1| < 1$ und $|z_2| < 1$, so gilt für den Betrag der Summe

i) $|z_1 + z_2| < 1$.
ii) $|z_1 + z_2| > 1$.
iii) $|z_1 + z_2| = 1$.
iv) Alle drei obigen Fälle kommen vor.

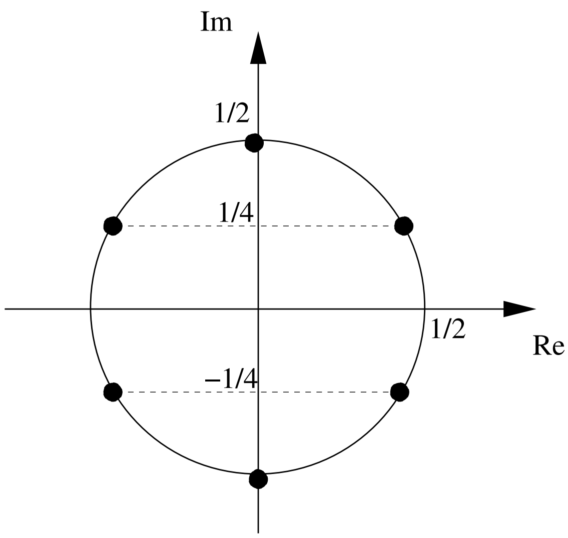
2. Welche der folgenden Inklusionen ist wahr?

i) $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z \cdot i) > \mathrm{Re}(z)\} \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) < -\mathrm{Im}(z)\}$
ii) $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z \cdot i) > \mathrm{Im}(z)\} \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > \mathrm{Re}(z)\}$
iii) $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \cdot \mathrm{Im}(z) > 0\} \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) > 0\}$
iv) $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z) > 0\} \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(-z) - \mathrm{Im}(-z) > 0\}$

3. Es seien $z, w \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen mit $z^4 = 1$ und $w^3 + i = 0$. Welche der folgenden Zahlen ist ein möglicher Wert der Summe $z + w$?

i) 0
ii) $-\frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$
iii) 1
iv) $\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

4. Die schwarzen Punkte in der unten stehenden Figur entsprechen den Lösungen der Gleichung ...



i) $z^8 = \frac{1}{256}$.
ii) $z^6 = \frac{1}{64}$.
iii) $z^6 = \frac{1}{2}$.
iv) $z^6 = -\frac{1}{64}$.

5. Was ist an folgender Rechnung falsch?

$$-1 = i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

i) Die Quadratwurzel $\sqrt{-1}$ existiert nicht.
ii) Die komplexe Quadratwurzel ist keine eindeutig definierte Funktion.
iii) Die Zahl i ist nicht wohldefiniert.
iv) Man darf im Komplexen nicht die Wurzel ziehen.
v) Die Potenzgesetze gelten für komplexe Zahlen nicht immer.

6. a) Schreibe die folgenden komplexen Zahlen in Normalform $x + iy$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$:

(i) $\dfrac{1}{1 + \frac{2}{i+7}}$;
(ii) $e^{e^{-i\pi/3}}$;
(iii) $(-\pi - i\pi)^3$.

b) Schreibe die folgenden komplexen Zahlen in Polarform $re^{i\varphi}$, wobei $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$:

(i) $1 - i\sqrt{3}$;
(ii) $e^{i\pi} + 2e^{i\frac{\pi}{2}}$;
(iii) $\dfrac{2 + 2i}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$.

7. Skizziere die folgenden Bereiche der komplexen Ebene!

a) $\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| = 3, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$
b) $\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, \frac{|z+2-2i|}{|z+i|} = 2\}$
c) $\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, \operatorname{Im}(z) \geq \operatorname{Re}(z)\}$
d) $\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z-3| \geq 1, |z-1-i| < 4\}$
e) $\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z-i+3| \geq |z+2i|, \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$

8. Es sei das Gebiet

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \,\middle|\, \operatorname{Im}\left(\frac{z+2}{iz}\right) > 0 \right\}$$

gegeben.

a) Skizziere das Gebiet B in der komplexen Ebene.

b) Das Polynom $z^3 + \frac{7}{2}z^2 + 7z + 6$ hat eine komplexe Nullstelle mit Realteil gleich -1. Bestimme alle Nullstellen dieses Polynoms in Normal- und in Polarform.

c) Welche dieser Nullstellen befinden sich in B?

9. Finde in der komplexen Ebene alle Lösungen der folgenden Gleichungen und gib diese in Normalform und Polarform an.

a) $z^6 = -8$;

b) $z^5 - 8(-1 - i\sqrt{3})z = 0$;

c) $3z^3 - 12z^2 + pz + q = 0$, wobei $z_1 = 3 + i$ eine Lösung der Gleichung sein soll und p, q reelle Koeffizienten sind, welche noch bestimmt werden müssen.

10. Prüfungsaufgabe Winter 2015:

a) Bestimme alle komplexen Nullstellen des Polynoms $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ in Normalform $a + ib$.

b) Zerlege $f(x)$ in ein Produkt $f(x) = p(x)\,q(x)$ zweier quadratischer Polynome p, q mit reellen Koeffizienten. Bestimme die Partialbruchzerlegung von $\frac{f'(x)}{f(x)}$, d. h.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{Ax + B}{p(x)} + \frac{Cx + D}{q(x)}, \qquad A, B, C, D \in \mathbb{R}.$$

(Dabei bezeichnet f' die Ableitung von f.)

Abgabe der schriftlichen Aufgaben am Mittwoch, 18. November 2015 in den Schnellübungen. Die Multiple-Choice-Aufgaben sind online einzureichen.