Lösung: Serie 4

1. ☐ auf $(0, 1)$

☑ auf $(-1, 1)$

☐ auf $[-1, 1]$

☐ auf $(-1, 1) \setminus \{0\}$

Die Funktion $u \mapsto \sqrt{u}$ ist differenzierbar für $u > 0$. Dies können wir mit der Definition des Differentialquotienten nachrechnen. Für $u > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} &= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u}}{\Delta u} \\
&= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{(\sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u})(\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u})}{\Delta u(\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u})} \\
&= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{u + \Delta u - u}{\Delta u(\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u})} \\
&= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{1}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{u} + \sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}.
\end{aligned}$$

Natürlich stimmt dies mit der bekannten Ableitung der Wurzelfunktion überein.
Also ist die Funktion $f : x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ für $1 - x^2 > 0$ differenzierbar als Verknüpfung differenzierbarer Funktionen, das heisst auf dem Intervall $(-1, 1)$.
An der Stelle -1 gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\sqrt{1 - (-1 + \Delta x)^2} - \sqrt{1 - (-1)^2}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\sqrt{\Delta x(2 - \Delta x)}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0^+} \sqrt{\frac{2 - \Delta x}{\Delta x}} = \infty,
\end{aligned}$$

also ist die Funktion dort nicht differenzierbar. Entsprechendes gilt an der Stelle $+1$ mit einer analogen Rechnung:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\sqrt{1 - (1 + \Delta x)^2} - \sqrt{1 - 1^2}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\sqrt{-\Delta x(2 + \Delta x)}}{\Delta x} \\
&= -\lim_{\Delta x \to 0^-} \sqrt{\frac{2 + \Delta x}{-\Delta x}} = -\infty.
\end{aligned}$$

f ist zusammengefasst also auf $(-1, 1)$ differenzierbar.

2. ☐ $\frac{1}{(g' \circ f \circ g \circ f) \cdot (f' \circ g \circ f)}$

- ☐ $\frac{1}{(g^{-1}\circ g')\cdot(f^{-1}\circ f'\circ g^{-1})}$
- ☐ $\frac{1}{(g'\circ f^{-1}\circ g^{-1})\cdot(f'\circ f^{-1}\circ g^{-1})}$
- ☑ $\frac{1}{(g'\circ g^{-1})\cdot(f'\circ f^{-1}\circ g^{-1})}$

Es gilt $h' = \frac{1}{(g'\circ g^{-1})\cdot(f'\circ f^{-1}\circ g^{-1})}$. Unter Anwendung der Kettenregel und der Ableitung der inversen Funktion erhalten wir

$$h' = \frac{1}{(g\circ f)'\circ h} = \frac{1}{((g'\circ f)\cdot f')\circ h} = \frac{1}{(g'\circ f\circ f^{-1}\circ g^{-1})\cdot(f'\circ f^{-1}\circ g^{-1})}$$
$$= \frac{1}{(g'\circ g^{-1})\cdot(f'\circ f^{-1}\circ g^{-1})}.$$

3.
- ☐ $f'(x) = x^2$.
- ☐ $f'(x) = x^{x-1}$.
- ☐ $f'(x) = x^x$.
- ☑ $f'(x) = (1+\log x)x^x$.
- ☐ $f'(x) = x + x\log x$.
- ☐ keiner der obigen Ausdrücke.

Es gilt $f(x) = x^x = \left(e^{\log x}\right)^x = e^{x\log x}$. Unter Anwendung der Ketten- und anschliessend der Produktregel erhalten wir

$$f'(x) = (x\log x)' e^{x\log x} = \left(\log x + \frac{x}{x}\right) e^{x\log x} = (1+\log x)x^x.$$

4.
- ☐ 2
- ☐ $-\frac{1}{2}$
- ☐ -2
- ☑ $\frac{1}{2}$
- ☐ $\frac{2}{3}$
- ☐ $\frac{3}{2}$
- ☐ Keine der obigen Antworten ist richtig.

Der Wert $f'(1)$ ist die Steigung m der Geraden, welche die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(1, f(1))$ definiert. Die Steigung der Geraden ist

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-0}{1-(-3)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

5.
- ☐ $t(x) = -\frac{1}{27}(x-24)+3$
- ☐ $t(x) = \frac{1}{27}x+3$
- ☑ $t(x) = \frac{1}{27}(x-24)+3$

☐ $t(x) = \frac{1}{27}(x+24)+3$

Es gilt $f'(x) = \frac{1}{3}(x+3)^{-2/3}$. Es ergibt sich also

$$f(24) = (24+3)^{1/3} = 3 \text{ und } f'(24) = \frac{1}{3}(24+3)^{-2/3} = \frac{1}{27}.$$

Somit muss t die Gerade mit Steigung $\frac{1}{27}$ sein, welche für $x = 24$ den Wert 3 annimmt. Dies ergibt die Gleichung $t(x) = \frac{1}{27}(x-24)+3$.

6.a) Für die Ableitung der inversen Funktion gilt

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Hier soll nun $\operatorname{arccot} x$ die Rolle von f^{-1} und $\cot x$ die Rolle von f übernehmen. Aus der Schnellübung 2, Aufgabe 4.d) wissen wir bereits, dass

$$f'(x) = -(1+\cot^2 x)$$

ist. Wir erhalten also

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccot} x = \frac{1}{-(1+\cot^2(\operatorname{arccot} x))} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

b) Zunächst rechnen wir mit der Kettenregel

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x} + \cos(\arctan x))^{2015}\right) \\
&= 2015\left(\sqrt[3]{x} + \cos(\arctan x))^{2014}\right) \cdot \frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x} + \cos(\arctan x)\right) \\
&= 2015\left(\sqrt[3]{x} + \cos(\arctan x))^{2014}\right) \cdot \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \sin(\arctan x) \cdot \frac{d}{dx}\arctan x\right).
\end{aligned}$$

Nun wissen wir aus Serie 3, Aufgabe 9.b), dass

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \text{ für } x \in \mathbb{R}.$$

Analog dazu gilt auch

$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \text{ für } x \in \mathbb{R},$$

dies folgt auch aus der Beziehung $\cos^2(\arctan x) + \sin^2(\arctan x) = 1$. Mithilfe der Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion gilt des Weiteren

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan x)}} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Damit ist die gesuchte Ableitung gleich

$$2015\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^{2014} \cdot \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\right).$$

c) Sei $f(x) = -2x^2 + 8x + 3$. Es gilt $f'(x) = -4x + 8$ und aus Serie 3, Aufgabe 6.a) wissen wir, dass

$$f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{\frac{11-x}{2}}.$$

Mit der Formel für die Ableitung der inversen Funktion folgt nun

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-4\left(2+\sqrt{\frac{11-x}{2}}\right)+8} = -\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{11-x}}.$$

Dies kann man natürlich auch direkt ausrechnen, also $f^{-1}(x)$ ganz normal ableiten.

d) Sei $f(x) = 2e^{-x^2}$. Es gilt $f'(x) = -4xe^{-x^2}$ und aus Serie 3, Aufgabe 6.b) wissen wir, dass

$$f^{-1}(x) = \sqrt{-\log\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Mit der Formel für die Ableitung der inversen Funktion folgt nun

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-4\sqrt{-\log\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot e^{-\left(\sqrt{-\log\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{-4\sqrt{-\log\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2x\sqrt{-\log\left(\frac{x}{2}\right)}}.\end{aligned}$$

Dies kann man natürlich auch direkt ausrechnen, also $f^{-1}(x)$ ganz normal ableiten.

7.a) Die Tangente an den Funktionsgraphen von f an der Stelle $(x_0, f(x_0))$ ist die Gerade

$$y(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Diese hat die Steigung $f'(x_0)$ und erfüllt $y(x_0) = f(x_0)$. Funktionswert und Steigung im Punkt x_0 sind somit wie gewünscht und diese beiden Bedingungen legen eine Gerade auch eindeutig fest.

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$, also $f'(x_0) = f'(6) = \frac{1}{4}$ und $f(x_0) = f(6) = 2$.
Die Geradengleichung lautet also $y(x) = \frac{1}{4}(x-6) + 2 = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.

b) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$, also $f'(x_0) = f'(11) = \frac{1}{6}$ und $f(x_0) = f(11) = 3$.
Die Geradengleichung lautet also $y(x) = \frac{1}{6}(x-11) + 3 = \frac{1}{6}x + \frac{7}{6}$.

c) $g'(x) = 2$, also $g'(x_0) = g'(0) = 2$ und $g(x_0) = g(0) = 2$.
Die Geradengleichung lautet also $y(x) = 2(x-0) + 2 = 2x + 2$.

d) $g'(x) = 2$, also $g'(x_0) = g'(4) = 2$ und $g(x_0) = g(4) = 10$.
Die Geradengleichung lautet also $y(x) = 2(x-4) + 10 = 2x + 2$.

Bei der zweiten Funktion erhalten wir beide Male dasselbe Resultat, man würde auch bei einem beliebigen Punkt wieder die gleiche Gerade $y(x) = 2x+2$ erhalten, was ausserdem die ursprüngliche Funktion ist. Die zweite Funktion ist nämlich bereits linear und unsere Linearisierung der Funktion (was wir mit der Tangente eigentlich bezwecken), hat daher keinen Einfluss. Die erste Funktion ist nicht linear und muss deshalb an verschiedenen Punkten auch durch verschiedene Geraden approximiert werden.

8.a) Nach Definition gilt $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Also gilt für kleine h die lineare Näherung

$$f'(x_0)\cdot h \approx f(x_0+h) - f(x_0) \implies f(x_0+h) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot h.$$

Beachte, dass es sich dabei nur um die Tangente handelt, einfach anders aufgeschrieben für $h = x - x_0$. Die Bedingung, dass h klein sein muss, entspricht also der Bedingung, dass die Tangente den Graphen einer Funktion in der Nähe des Berührpunktes x_0 gut approximiert.

$f : x \mapsto f(x) = \sqrt[3]{x} \implies f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$. Wir setzen $x_0 = 1000$ und $h = -\varepsilon$, dann folgt

$$\sqrt[3]{1000-\varepsilon} \approx 10 - \frac{\varepsilon}{300}.$$

b) $f : x \mapsto f(x) = \frac{1}{x^2} - 1 \implies f'(x) = -\frac{2}{x^3}$. Wir setzen $x_0 = 1$ und $h = \varepsilon$, dann folgt

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^2} - 1 \approx -2\varepsilon.$$

c) $f : x \mapsto f(x) = e^x \implies f'(x) = e^x$. Wir setzen $x_0 = 1$ und $h = \varepsilon$, dann folgt

$$e^{1+\varepsilon} \approx e(1+\varepsilon).$$

d) $f : x \mapsto f(x) = \prod_{k=0}^{364}\left(1 - \frac{kx}{365}\right)$. Wir setzen $x_0 = 0$ und $h = \varepsilon$. Wenn wir das Produkt ableiten, so bekommen wir (mit der Produktregel) folgendes: Wir leiten jeweils nur einen Faktor ab, die anderen nicht, und summieren das Ganze auf. Also

$$f'(x) = \sum_{j=0}^{364}\left[\left(1 - \frac{jx}{365}\right)' \cdot \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{364}\left(1 - \frac{kx}{365}\right)\right] = \sum_{j=0}^{364}\left[\left(-\frac{j}{365}\right)\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{364}\left(1 - \frac{kx}{365}\right)\right].$$

Wenn wir $x = 0$ setzen, so ergibt sich

$$f'(0) = \sum_{j=0}^{364}\left(-\frac{j}{365}\right)\cdot 1\cdot 1\cdots 1 = -\frac{1}{365}\sum_{j=0}^{364} j = -\frac{1}{365}\cdot\frac{364\cdot 365}{2} = -182.$$

Folglich gilt

$$\prod_{k=0}^{364}\left(1 - \frac{k\varepsilon}{365}\right) \approx 1 - 182\varepsilon.$$

9. Nach Definition gilt $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Also gilt für kleine h die lineare Näherung

$$f'(x_0)\cdot h \approx f(x_0+h) - f(x_0) \implies f(x_0+h) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot h.$$

Nun fassen wir h als kleine Änderung $dx = h$ auf (Messfehler), die obige Approximation wird damit zu

$$df = f(x_0+dx) - f(x_0) \approx f'(x_0)\cdot dx.$$

Wir kommen nun zur Lösung der Aufgabe. Es seien α der halbe Öffnungswinkel und h die Höhe des Kegels. Für die Grundfläche erhalten wir

$$G = \pi r^2 = \pi(h\tan\alpha)^2,$$

für das Volumen ergibt sich somit

$$V(\alpha) = \frac{1}{3}Gh = \frac{\pi}{3}h^3\tan^2\alpha.$$

Ableiten ergibt

$$\frac{d}{d\alpha}V(\alpha) = \frac{\pi}{3}h^3\cdot 2\tan\alpha\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{2\pi}{3}h^3\frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha}.$$

Zusammen ergibt sich für die Volumenänderung also die Schätzung

$$dV(\alpha) = V(\alpha+d\alpha) - V(\alpha) \approx \frac{d}{d\alpha}V(\alpha)\,d\alpha = \frac{2\pi}{3}h^3\frac{\sin\alpha\,d\alpha}{\cos^3\alpha}.$$

10. Wir vereinbaren als erstes, Zeiten in Sekunden und Strecken in Metern zu messen. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass zur Zeit $t = 0$ der Punkt P_0 beschienen wird. Der Winkel, den der Leuchtstrahl mit der Verbindungsachse zwischen Leuchtturm und P_0 einschliesst, ist $\varphi(t) = \frac{2\pi}{15}t$. Zur Zeit t wird dann der Punkt mit der Koordinate

$$x(t) = 3000\tan(\varphi(t)) = 3000\tan\left(\frac{2\pi}{15}t\right) \qquad (*)$$

beleuchtet. Die Geschwindigkeit, mit der sich der Lichtstrahl über den Punkt bewegt, ist dann genau die Ableitung dieser Funktion nach der Zeit:

$$x'(t) = 3000\,\frac{1}{\cos^2\left(\frac{2\pi}{15}t\right)}\cdot\frac{2\pi}{15} = 400\pi\left(1+\tan^2\left(\frac{2\pi}{15}t\right)\right). \qquad (**)$$

Dabei wurde die bekannte Relation

$$\cos^2 z = \frac{1}{1+\tan^2 z}$$

benutzt. Das obige Resultat $(**)$ können wir noch vereinfachen, wenn wir den Tangens mithilfe von Gleichung $(*)$ durch $x(t)$ ersetzen:

$$x'(t) = 400\pi\left(1+\tan^2\left(\frac{2\pi}{15}t\right)\right) = 400\pi\left(1+\frac{x^2(t)}{3000^2}\right).$$

Damit ergeben sich die folgenden Geschwindigkeiten:

Punkt	P_0	P_1	P_2	P_3
Koordinate x in m	0	1000	2000	3000
Geschwindigkeit x' in m/s	$400\pi \approx 1257$	$\frac{4000}{9}\pi \approx 1396$	$\frac{5200}{9}\pi \approx 1815$	$800\pi \approx 2513$