Serie 1

1. Eine konvergente Folge ist immer...

- ☐ entweder monoton wachsend oder monoton fallend.
- ☐ beschränkt.
- ☐ die Summe einer Nullfolge und einer konstanten Folge.
- ☐ alternierend.

2. Die geometrische Folge $(a_n) = (a \cdot q^n)_n$, für $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, konvergiert, wenn...

- ☐ $q < -1$.
- ☐ $q = -1$.
- ☐ $-1 < q < 1$.
- ☐ $q = 1$.
- ☐ $q > 1$.

3. Gegeben sei die Folge $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Welche der folgenden Aussagen sind **falsch?**

- ☐ Die Folge ist monoton wachsend.
- ☐ Die Folge ist beschränkt.
- ☐ Die Folge ist eine Nullfolge.
- ☐ Die Folge ist konvergent.
- ☐ Der Limes der Folge ist 1.

4. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ☐ Eine divergente Folge ist nicht beschränkt.
- ☐ Jede beschränkte Folge ist konvergent.
- ☐ Jede konvergente Folge ist beschränkt.
- ☐ Eine nicht beschränkte Folge divergiert.

5. Die Ungleichung $||x-1|-1| < 2$ für reelle Zahlen x ist äquivalent zu...

- ☐ $x < 4$.

☐ $|x| < 4$.

☐ $0 < x < 2$

☐ $-2 < x < 4$

☐ $-3 < x < 3$

6. *Bemerkung:* Das Prinzip der vollständigen Induktion ist in der Formelsammlung "Formeln, Tabellen, Begriffe" im Kapitel 'Zahlen' zu finden.

a) Zeige mit vollständiger Induktion, dass

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n^2 + n}{2}, \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

b) Zeige mit vollständiger Induktion, dass für $a, q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$, gilt:

$$a + a \cdot q + a \cdot q^2 + \cdots + a \cdot q^n = a \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

c) Ist die Folge

$$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} + \frac{n}{n^2}$$

konvergent? Falls ja, was ist ihr Grenzwert?

7. Die Folge der DIN A - Papierformate ist wie folgt definiert:
DIN A0 ist ein Rechteck mit dem Seitenverhältnis $\sqrt{2} : 1$ und der Fläche $1\,\mathrm{m}^2$.
DIN Ak, $k \geq 1$, entsteht aus DIN A$(k-1)$, indem die längere Seite des Rechtecks halbiert wird.

a) Berechne die Länge l_k und die Breite b_k des DIN Ak - Formates.
Berechne ebenfalls l_k/b_k.

b) Wir stapeln DIN Ak - Blätter der Stärke 1 mm aufeinander (zuunterst ein DIN A0 - Blatt, darauf ein DIN A1 - Blatt, dann ein DIN A2 - Blatt usw.). Wie hoch wird der Stapel und wie gross ist sein Volumen, falls sich Formate

i) mit Seitenlängen grösser als 1 mm („technische Grenze")

ii) mit Seitenlängen grösser als 10^{-7} cm („physikalische Grenze")

iii) mit beliebig kleinen Seitenlängen („ideale Grenze")

realisieren lassen?

8. Gesucht sind je eine Liste der Nullstellen der Funktionen

$$f : x \mapsto \cos(3x+1) \quad \text{und} \quad g : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Für welche Werte von x ist $f(x) = 1$? Für welche Werte von x ist $g(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$?

9. Gegeben sei die Funktion

$$f:\ x \longmapsto \frac{x^2+2x-3}{x^3-x^2-2x}.$$

Bestimme den maximalen Definitionsbereich und alle Nullstellen von f. Für welche Werte von x ist die Funktion f positiv? Für welche negativ? Skizziere den Graphen $\Gamma(f)$.
Hinweis: Für den Graphen kann man z.B. das Bild ausgewählter Werte im Definitionsbereich berechnen und dann die Punkte miteinander verbinden. Was passiert mit der Funktion f in Umgebungen der Nullstellen des Nenners?

10. Die Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien rekursiv definiert durch

$$f_0(x) := |x|, \qquad f_{n+1}(x) := \big|1 - f_n(x)\big|, \quad n \geq 1.$$

Man zeichne den Graphen der Funktion f_{10}.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben am Mittwoch, 30. September 2015 in der Vorlesung.
Die Multiple-Choice-Aufgaben sind online einzureichen.