Serie 11

1. Berechne die Bogenlänge s der Spirale, die gegeben ist durch

$$t \mapsto \vec{r}(t) = e^{-t}(\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

wobei $T \to \infty$.

i) $s = 3$
ii) ∞
iii) $s = 2$
iv) $s = \frac{\sqrt{2}}{2}$
v) $s = \frac{1}{2}$
vi) $s = \sqrt{2}$

2. Die Kurve K ist gegeben durch die Parameterdarstellung

$$x(t) = \int_1^t \frac{\cos(u)}{u} du, \quad y(t) = \int_1^t \frac{\sin(u)}{u} du,$$

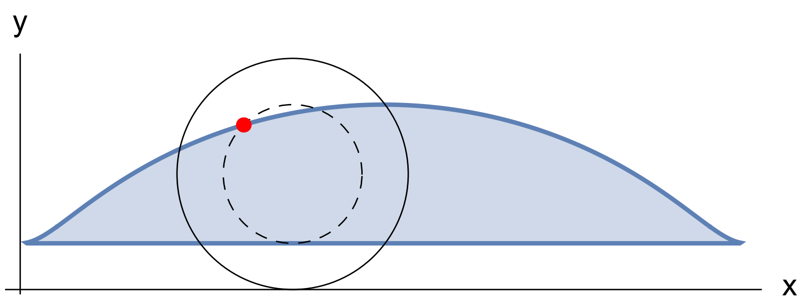
wobei $t \geq 1$. Was ist die Bogenlänge von K vom Koordinatenursprung bis zum ersten Punkt mit vertikaler Tangente?

i) $\log\left(\frac{\pi}{2}\right)$
ii) $\frac{3\pi}{2}$
iii) $\log\left(\frac{3\pi}{2}\right)$
iv) $\frac{\pi}{2}$

3. Die verkürzte Zykloide ist die Kurve, die von einem Punkt auf einem rollenden Rad beschrieben wird. Eine Parameterdarstellung ist gegeben durch

$$x(t) = at - b\sin t, \quad y(t) = a - b\cos t,$$

mit $a > b > 0$. Berechne den Flächeninhalt der gefärbten Fläche.



i) $(2a^2 + b^2 - 2ab)\pi$
ii) $(2a^2 - 2a + b^2 - 2b)\pi$
iii) $(2a^2 + b^2)\pi$
iv) $(b^2 + 2ab)\pi$

4. Berechne die Oberfläche des Körpers, der durch Rotation der Kurve

$$y = \cos x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

um die x-Achse entsteht.

i) $\log(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2}$
ii) 0
iii) $2\pi\left(\log(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2}\right)$
iv) $2\pi\left(\log(1 + \sqrt{2}) + 2\right)$

5. Berechne das Volumen des Körpers, der durch Rotation der Kurve

$$y = \cos x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

um die x-Achse entsteht.

i) $\frac{\pi^4}{6}$
ii) $\frac{\pi^2}{2}$
iii) $\frac{\pi^3}{3}$
iv) π

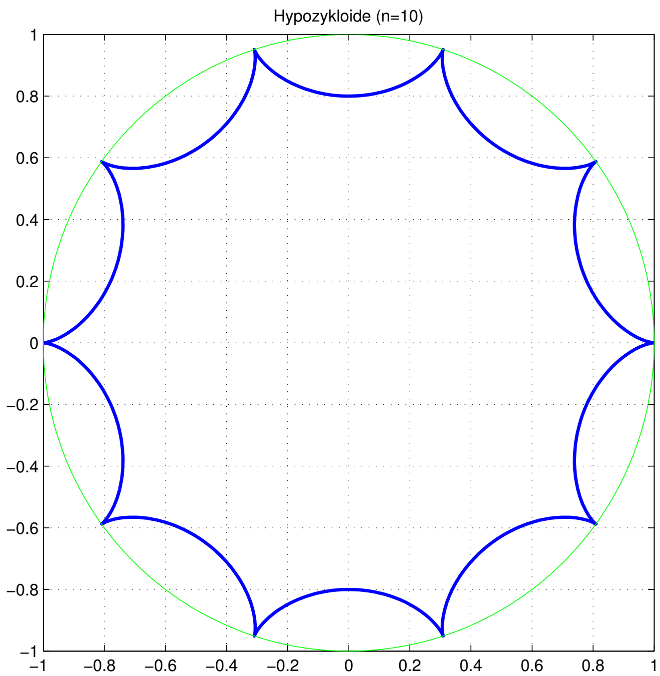
6. Es sei $f(x) = \log\left(\frac{\cosh(x)-1}{\sinh(x)}\right)$ für $x > 0$.

a) Berechne die Ableitung $f'(x)$.
b) Bestimme die Bogenlänge des Graphen von f über dem Intervall $[a, b]$, $0 < a < b$.

7. Im Innern des Kreises mit Radius 1 rolle ein kleiner Kreis C mit Radius $1/n$, $n = 3, 4, \dots$ ab. Ein Punkt der Peripherie des Kreises C beschreibt dann eine geschlossene Kurve K (*Hypozykloide*), welche durch die Parametrisierung $(0 \le \varphi \le 2\pi)$

$$x(\varphi) = \frac{1}{n}((n-1)\cos\varphi + \cos((n-1)\varphi))$$
$$y(\varphi) = \frac{1}{n}((n-1)\sin\varphi - \sin((n-1)\varphi))$$

beschrieben wird.



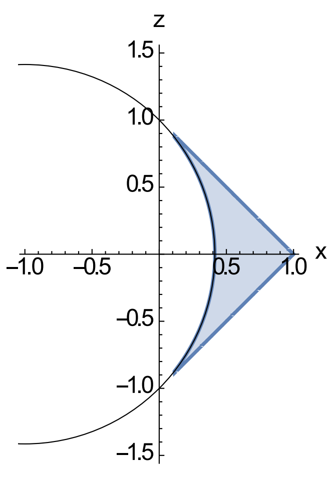
a) Man berechne in Abhängigkeit von n die durch die Kurve K eingeschlossene Fläche.

b) Für welche n ist diese Fläche grösser als $2/3$ der Fläche des grossen Kreises?

8. Man bestimme die Oberfläche des Rotationsellipsoids

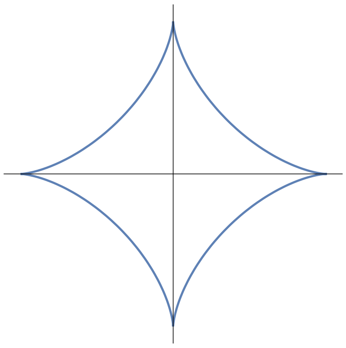
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{16} = 1.$$

9. Das markierte Gebiet wird um die z-Achse rotiert. Man berechne das Volumen.



Der Kreis hat dabei den Mittelpunkt $(-1, 0)$ und geht durch die beiden Punkte $(0, \pm 1)$.

10. Es sei die *Astroide* durch die folgende Parameterdarstellung gegeben:



$$x(t) = a\cos^3 t$$
$$y(t) = a\sin^3 t, \qquad \text{für } 0 \le t \le 2\pi.$$

Dabei ist $a > 0$ eine feste Zahl. Berechne in Abhängigkeit von a

a) die Bogenlänge der Astroide;

b) die Fläche des Astroidensterns;

c) das Volumen des Rotationskörpers, der erhalten wird, wenn die Astroide um die x-Achse gedreht wird;

d) die Oberfläche dieses Rotationskörpers.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben am Mittwoch, 9. Dezember 2015 in der Vorlesung. Die Multiple-Choice-Aufgaben sind online einzureichen.