D-MAVT, D-MATL
Prof. Dr. Urs Lang

Analysis I
HS 15

Schnellübung 5

1. a) Verwende die Identitäten $\cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos\varphi)$ und $\sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos\varphi)$, um die folgende explizite Formel für die Lösungen der Gleichung $z^2 = w = a + ib \in \mathbb{C}$ in Normalform herzuleiten:

$$z_{0,1} = \pm\left(\sqrt{\frac{|w|+a}{2}} + i\,\mathrm{sgn}(b)\sqrt{\frac{|w|-a}{2}}\right).$$

Dabei bezeichnet sgn die Vorzeichenfunktion, für $x \in \mathbb{R}$ ist sie gegeben durch

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{falls } x < 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \\ 1, & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

Bemerkung: Diese Lösungsformel findet sich auch im Buch *Formeln, Tabellen, Begriffe*, 5. Auflage 2015, S. 23.

b) Berechne die komplexen Quadratwurzeln von $-3+4i$.

2. Berechne die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int (t-x)\,dx$,

b) $\displaystyle\int (t-x)\,dt$,

c) $\displaystyle\int x\,e^{x^2}\,dx$,

d) $\displaystyle\int x\,(1+x^2)^9\,dx$,

e) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x+1}\,dx$,

f) $\displaystyle\int \frac{1-x^5}{1-x}\,dx$.

3. Berechne mit partieller Integration:

a) $\displaystyle\int_0^\pi x^2\sin x\,dx$,

b) $\displaystyle\int x^2\log x\,dx$,

c) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x^2}\,dx$.

4. Es sei f eine auf der ganzen Zahlengeraden definierte und stetige Funktion. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$F\colon\ x \longmapsto \int_0^{\sin x} f(t)\,dt.$$