Lösung: Schnellübung 1

1.a) Da die Kosinusfunktion 2π-periodisch ist, gilt $a_{n+6} = a_n$ für jedes $n \geq 0$. Weiter gilt

$$a_0 = 1,\ a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = -\frac{1}{2},\ a_3 = -1,\ a_4 = -\frac{1}{2},\ a_5 = \frac{1}{2}.$$

Daraus folgt, dass $|a_n| \leq 1$ und damit beschränkt ist. Die Folge ist aber nicht monoton und auch nicht konvergent: Die Abstände zwischen den Folgegliedern sind mindestens $\frac{1}{2}$, d.h. für ein $\varepsilon < \frac{1}{4}$ und eine beliebige Zahl $a \in \mathbb{R}$ führt die Ungleichung $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ auf den Widerspruch

$$|a_N - a_{N+1}| \leq |a_N - a| + |a_{N+1} - a| < \varepsilon + \varepsilon < \frac{1}{2}.$$

b) Wir dividieren Zähler und Nenner durch n^3 und erhalten

$$a_n = \frac{5n^3 - 1}{2n^3 + 6n - 7} = \frac{5 - \frac{1}{n^3}}{2 + \frac{6}{n^2} - \frac{7}{n^3}},$$

was gegen $\frac{5}{2}$ konvergiert. Deshalb ist die Folge auch beschränkt. Da $a_1 = 4$, $a_2 = \frac{13}{7}$ und $a_3 = \frac{134}{65} > a_2$, ist a_n nicht monoton. (Allerdings ist a_n monoton steigend ab dem zweiten Glied.)

c) Wie man anhand der ersten Folgerglieder vermuten kann, ist a_n beschränkt und monoton fallend. Daraus ergibt sich die Konvergenz der Folge.

Für die *Beschränktheit* zeigt man durch Induktion, dass $0 \leq a_n \leq 1$ für alle n. Tatsächlich ist $0 \leq a_1 = 1 \leq 1$. Mit der Induktionsannahme $0 \leq a_{n-1} \leq 1$ erhält man

$$0 \leq \frac{a_{n-1}}{3} \leq \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + 2} \leq \frac{a_{n-1}}{2} \leq \frac{1}{2} < 1.$$

Das heisst $0 \leq a_n \leq 1$.

Jetzt beweisen wir die *Monotonie*: für $n = 2,\ 3, \ldots$ gilt, dass

$$a_n - a_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + 2} - a_{n-1} = -\frac{a_{n-1} + a_{n-1}^2}{a_{n-1} + 2} \leq 0.$$

Das heisst $a_n \leq a_{n-1}$ für alle n und so ist die Folge monoton fallend.

Um den Grenzwert zu berechnen, bemerken wir, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n =: L.$$

Man sieht also, dass

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_n+2} = \frac{L}{L+2}.$$

Umgeformt ergibt das die Gleichung

$$L^2 + L = L(L+1) = 0.$$

Daher ist $L = 0$ oder $L = -1$, wobei -1 wegen $a_n \geq 0$ für alle n nicht als Lösung in Frage kommt. a_n strebt somit gegen 0.

d) Wir erweitern geschickt:

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Somit ist die Folge beschränkt, monoton fallend und konvergiert gegen 0.

e) Wir erweitern geschickt:

$$a_n = \sqrt{n(n+1)} - n = \frac{\left(\sqrt{n(n+1)}-n\right)\left(\sqrt{n(n+1)}+n\right)}{\sqrt{n(n+1)}+n} = \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n(n+1)}+n}$$
$$= \frac{n}{\sqrt{n(n+1)}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}.$$

Somit ist die Folge beschränkt, monoton wachsend und konvergiert gegen $\frac{1}{2}$.

2. Für $p \leq q$ dividieren wir sowohl den Zähler als auch den Nenner durch n^q und erhalten

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{c_0}{n^q} + \frac{c_1}{n^{q-1}} + \ldots + \frac{c_{p-1}}{n^{q-(p-1)}} + \frac{c_p}{n^{q-p}}}{\frac{d_0}{n^q} + \frac{d_1}{n^{q-1}} + \ldots + \frac{d_{q-1}}{n} + d_q} = \frac{c_p}{d_q} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{q-p}}.$$

Der letzte Limes ist 1, wenn $p = q$, und 0, wenn $p < q$.
Bemerkung: Für $p > q$ ist die Folge divergent.

3. Es gilt: $2 = 2^1, 2\sqrt{2} = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}}, 2\sqrt{2\sqrt{2}} = 2^1 \cdot \left(2^{1+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$ und $2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = 2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}$ und so weiter.
Die geometrische Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

hat den Grenzwert $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$. Da die Funktion $t \mapsto 2^t$ stetig ist, ist der gesuchte Grenzwert gleich $2^2 = 4$.
Analog gilt $3 = 3^1$, $3\sqrt[3]{3} = 3 \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 3^{1+\frac{1}{3}}$, $3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}} = 3^{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}}$ und so weiter. Die hier verwendete geometrische Reihe hat den Grenzwert $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}\dots = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$. Also ist der gesuchte Grenzwert gleich $3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.

4. Die erste (bzw. letzte) zweistellige natürliche Zahl mit der Eigenschaft ist 11 (bzw. 98). Die Zahlen, die addiert werden, sind also Glieder der Folge $a_n = 11 + 3(n-1)$, mit $n = 1, 2, \dots, 30$. Wenn man die Summe als S bezeichnet, hat man

$$S = \sum_{n=1}^{30} (11 + 3(n-1)) = 30 \cdot 11 + 3 \cdot \left(\sum_{n=1}^{30} n - 30\right) = 30 \cdot 11 + 3 \cdot \left(\frac{30 \cdot 31}{2} - 30\right).$$

Somit ist $S = 30 \cdot 11 + 3 \cdot (15 \cdot 31 - 15 \cdot 2) = 30 \cdot 11 + 3 \cdot 15 \cdot 29 = 1635$.