Serie 13

1. Der Wert einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fällt am schnellsten in die Richtung...

i) ✗ der minimalen partiellen Ableitung.
ii) ✓ entgegengesetzt zum Gradienten.
iii) ✗ entgegengesetzt zur maximalen partiellen Ableitung.
iv) ✗ orthogonal zum Gradienten.
v) ✗ des Gradienten.

Lösung
Die Frage ist äquivalent dazu, für welchen Einheitsvektor $\vec{e}$ an einem Punkt (x_0, y_0) die Richtungsableitung $D_{\vec{e}}f(x_0, y_0)$ am kleinsten, das heisst am stärksten negativ ist. Die Richtungsableitung ist aber gleich $\vec{e} \cdot \mathbf{grad}\, f(x_0, y_0)$, und dies wird am kleinsten für $\vec{e} = -\frac{\mathbf{grad}\, f(x_0,y_0)}{|\mathbf{grad}\, f(x_0,y_0)|}$. Genauer gilt:

$$D_{\vec{e}}f(x_0, y_0) = \vec{e} \cdot \mathbf{grad}\, f(x_0, y_0) = \underbrace{|\vec{e}|}_{=1} \cdot |\mathbf{grad}\, f(x_0, y_0)| \cdot \cos \omega,$$

wobei ω den von $\vec{e}$ und dem Vektor $\mathbf{grad}\, f(x_0, y_0)$ eingeschlossenen Winkel bezeichnet. Für $\omega = \pi$ erreichen wir also das Minimum und in diesem Fall hat die Richtungsableitung dieselbe Länge wie der Gradient, zeigt jedoch in die umgekehrte Richtung.

2. Gegeben ist die Funktion $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = x^3y^2$. Man setze sich in den Punkt $(1, -1)$. Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?

i) ✗ Man stellt in Richtung von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Zunahme der Funktionswerte fest.
ii) ✗ Man stellt in y-Richtung eine Abnahme der Funktionswerte fest.
iii) ✗ Man stellt in Richtung von $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ eine Zunahme der Funktionswerte fest.
iv) ✗ Man stellt in x-Richtung eine Zunahme der Funktionswerte fest.
v) ✓ Man stellt in Richtung von $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Zunahme der Funktionswerte fest.

- **Lösung**
  Es gilt

$$\mathbf{grad}\, f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2 \\ 2x^3y \end{pmatrix}$$

und damit

$$\mathbf{grad}\, f(1, -1) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Die Richtungsableitung im Punkt $(1,-1)$ in Richtung eines Einheitsvektors $\vec{e}$ ist somit gegeben durch

$$D_{\vec{e}}f(1,-1) = \vec{e} \cdot \textbf{grad}\, f(1,-1) = \vec{e} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Nun können wir für $\vec{e}$ die entsprechenden Werte einsetzen. Ist das Resultat positiv, so ist in diese Richtung eine Zunahme der Funktionswerte festzustellen und umgekehrt.

- **Lösung**
  Option 1 ist falsch: $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und damit $D_{\vec{e}}f(1,-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- **Lösung**
  Option 2 ist falsch: $\vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und damit $D_{\vec{e}}f(1,-1) = -2$.
- **Lösung**
  Option 3 ist falsch: $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und damit $D_{\vec{e}}f(1,-1) = \frac{5}{\sqrt{2}}$.
- **Lösung**
  Option 4 ist falsch: $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und damit $D_{\vec{e}}f(1,-1) = 3$.
- **Lösung**
  Option 5 ist richtig: $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und damit $D_{\vec{e}}f(1,-1) = -\frac{5}{\sqrt{2}}$.

3. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und sei $c \in \mathbb{R}$. Definiere $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $g(x,y) := c \cdot f(x,y)$. Welche Aussagen sind richtig?

i) ✗ Falls (x_0, y_0) ein lokales Maximum von g ist, dann auch von f.
ii) ✗ Falls (x_0, y_0) ein lokales Extremum von g ist, dann auch von f.
iii) ✓ Falls (x_0, y_0) ein lokales Extremum von f ist, dann auch von g.

- **Lösung**
  Da f auf $\mathbb{R}^2$ differenzierbar ist, gilt dasselbe auch für g. Somit erfüllen alle lokalen Extremalstellen (x_0, y_0) von g die Gleichung

$$\textbf{grad}\, g(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad c \cdot \textbf{grad}\, f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- **Lösung**
  Option 1 ist falsch: Gilt nicht falls $c \leq 0$! Beispielsweise gilt für $c = -1$, dass $g = -f$, die Extremalstellen von f und g sind dann dieselben, jedoch sind die lokalen Maxima von g genau die lokalen Minima von f (und umgekehrt).
- **Lösung**
  Option 2 ist falsch: Gilt nicht falls $c = 0$! In diesem Fall gilt natürlich $g \equiv 0$ und jeder Punkt in $\mathbb{R}^2$ ist ein lokales Extremum von g.

- **Lösung**
  Option 3 ist richtig: Jedes lokale Extremum (x_0, y_0) von f erfüllt
  $$\mathbf{grad}\, f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{grad}\, g(x_0, y_0) = c \cdot \mathbf{grad}\, f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

i) ✓ Jede globale Extremalstelle ist auch eine lokale Extremalstelle.

ii) ✗ Jede Stelle, an der die beiden partiellen Ableitungen f_x und f_y verschwinden, ist eine lokale Extremalstelle.

iii) ✗ Jede lokale Extremalstelle, an der die beiden partiellen Ableitungen f_x und f_y verschwinden, ist eine globale Extremalstelle.

iv) ✗ Es gibt immer nur eine globale Maximalstelle.

v) ✗ Jede lokale Extremalstelle ist auch eine globale Extremalstelle.

- **Lösung**
  Option 1 ist richtig: Eine globale Extremalstelle ist immer auch eine lokale Extremalstelle.
- **Lösung**
  Option 2 ist falsch: Es könnte sich auch um einen sogenannten Sattelpunkt handeln. Wir geben ein Gegenbeispiel an: Für die Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$ gilt $\mathbf{grad}\, f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$. Im Punkt $(0, 0)$ gilt also $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, jedoch ist im Ursprung kein lokales Extremum zu finden, denn für jede (kleine) Kreisscheibe mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt $(0, 0)$ liegen die Punkte $(r, 0)$ und $(0, r)$ in dieser Kreisscheibe. Insbesondere gilt
  $$f(0, r) = -r^2 < 0 = f(0, 0) < r^2 = f(r, 0),$$
  die Definition eines lokalen Extremums ist also verletzt. Intuitiv gesprochen gibt es also, beliebig nahe bei $(0, 0)$, zwei Punkte, welche einen kleineren, beziehungsweise grösseren Funktionwert annehmen als $(0, 0)$.
- **Lösung**
  Option 3 ist falsch: Ein Punkt (x_0, y_0) mit $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ ist nur ein Kandidat für eine lokale Extremalstelle und die globalen Extremalstellen findet man dann durch Einsetzen aller Kandidaten. (Siehe auch die Antwort zu Option 5.)
- **Lösung**
  Option 4 ist falsch: Das globale Maximum kann auch an mehreren Stellen angenommen werden. Ein einfaches Beispiel ist $f(x, y) = \cos(x) + \cos(y)$. Wir haben $\mathbf{grad}\, f(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ -\sin(y) \end{pmatrix}$. Da f auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert und differenzierbar ist, sind die einzigen Kandidaten für lokale Extrema durch
  $$\mathbf{grad}\, f(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ -\sin(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben, also $(x, y) = (k\pi, j\pi)$ für $k, j \in \mathbb{Z}$. Einsetzen liefert

$$f(k\pi, j\pi) = \cos(k\pi) + \cos(j\pi) = \begin{cases} 2, & \text{falls } k \text{ und } j \text{ gerade;} \\ -2, & \text{falls } k \text{ und } j \text{ ungerade;} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Somit gibt es unendlich viele Maximalstellen, nämlich alle Punkte $(2k\pi, 2j\pi)$ mit $k, j \in \mathbb{Z}$.

- **Lösung**
  Option 5 ist falsch: Man kann sich beispielsweise einfach eine Fläche im Raum denken mit verschieden hohen lokalen Maxima.

5. Sei $f : G \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, wobei $G \subset \mathbb{R}^2$ der Definitionsbereich von f ist. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

i) ✗ Hat f in (x_0, y_0) ein lokales Maximum bzw. Minimum, so gilt $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.

ii) ✓ Hat f in (x_0, y_0) ein lokales Maximum, so gilt $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ für alle $(x, y) \in G$ in der Nähe von (x_0, y_0).

iii) ✗ Gilt $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$, so hat f in (x_0, y_0) ein lokales Maximum oder Minimum.

- **Lösung**
  Option 1 ist falsch: Lokale Extrema können auch auf dem Rand von G liegen, wo die Ableitungen von f keineswegs Null sein müssen. (Vergleiche die Situation bei Extrema von Funktionen einer Variablen.)
- **Lösung**
  Option 2 ist richtig: Dies ist genau die Definition einer lokalen Maximalstelle.
- **Lösung**
  Option 3 ist falsch: Es könnte sich auch um einen sogenannten Sattelpunkt handeln, ein Gegenbeispiel ist $f(x, y) = x^2 - y^2$ im Punkt $(0, 0)$. Die Ableitungen verschwinden beide, aber es gibt (beliebig nahe bei $(0, 0)$) zwei Punkte, die einen kleineren bzw. grösseren Funktionswert annehmen als in $(0, 0)$.

6. a) Ein Berg sei beschrieben durch die Funktion

$$h(x, y) = 6000\, e^{-\frac{x^2}{1800} - \frac{y^2}{900}},$$

wobei die positive x-Achse nach Osten orientiert ist und die positive y-Achse nach Norden. In der Position $(7, 6, h(7, 6))$ steht ein Mann. Wie gross ist die Steigung (oder das Gefälle), wenn der Mann seinen Standort Richtung Nordosten bzw. Westen verlässt?

Lösung
Gefragt sind zwei verschiedene Richtungsableitungen der Funktion h im Punkt $(x_0, y_0) = (7, 6)$. Wir berechnen dazu zuerst den Gradienten von h in diesem Punkt.

$$h_x(x, y) = -\frac{20}{3} x e^{-\frac{x^2}{1800} - \frac{y^2}{900}} \quad \Rightarrow \quad h_x(7, 6) = -\frac{140}{3} e^{-\frac{49}{1800} - \frac{1}{25}}.$$

$$h_y(x,y) = -\frac{40}{3} y e^{-\frac{x^2}{1800}-\frac{y^2}{900}} \quad \Rightarrow \quad h_y(7,6) = -80 e^{-\frac{49}{1800}-\frac{1}{25}}.$$

Der Gradient in $(x_0, y_0) = (7,6)$ ist also

$$\mathbf{grad}\, h(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} h_x(7,6) \\ h_y(7,6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{140}{3} \\ -80 \end{pmatrix} e^{-\frac{121}{1800}} .$$

Richtung Nordosten entspricht dem Einheitsvektor $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Es folgt

$$\begin{aligned}
D_{\mathrm{NO}} h(7,6) &= \mathbf{grad}\, h(x_0,y_0) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{121}{1800}} \begin{pmatrix} -\frac{140}{3} \\ -80 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{121}{1800}} \left(-\frac{140}{3} \cdot 1 + (-80) \cdot 1 \right) \\
&\approx -83.74.
\end{aligned}$$

Richtung Westen entspricht dem Einheitsvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es folgt

$$\begin{aligned}
D_{\mathrm{W}} h(7,6) &= e^{-\frac{121}{1800}} \begin{pmatrix} -\frac{140}{3} \\ -80 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{140}{3} e^{-\frac{121}{1800}} \\
&\approx 43.63.
\end{aligned}$$

Insgesamt ist das Gefälle in Richtung Nordosten ungefähr doppelt so gross wie die Steigung in Richtung Westen.

b) Ein Wanderer befindet sich irgendwo im Nebel – auf einem Berg, dessen Höhenfunktion wir nicht kennen. Er möchte schnellstmöglich ins Tal. Alles, was er weiss, ist, dass der Weg Richtung Osten 25% Steigung hat und Richtung Nordwesten 35% Gefälle. In welche Richtung muss er gehen und wie steil ist es da?

Lösung

Richtung Osten entspricht dem Einheitsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; Richtung Nordwesten dem Einheitsvektor $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Der Wanderer befindet sich an einem Punkt (x_0, y_0) auf dem Berg, der durch eine Funktion $f(x,y)$ beschrieben wird. Für den unbekannten Gradienten setzen wir $(a_1, a_2)^T = \mathbf{grad}\, f(x_0, y_0)$. Die Information, welche dem Wanderer im Nebel zur Verfügung steht, sind die beiden Richtungsableitungen, was dem Skalarprodukt von Gradient und Einheitsrichtung entspricht. Also

$$
\begin{aligned}
25\% = 0.25 \overset{!}{=} D_{\mathrm{O}} f(x_0, y_0) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{grad}\, f(x_0, y_0) \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 = a_1; \\
-35\% = -0.35 \overset{!}{=} D_{\mathrm{NW}} f(x_0, y_0) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{grad}\, f(x_0, y_0) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot a_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot a_2.
\end{aligned}
$$

Für die Unbekannten a_1 und a_2 erhalten wir

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 0.25, \\
a_2 &= \left(-0.35 + \frac{a_1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \sqrt{2} \approx -0.245 \ .
\end{aligned}
$$

Der Gradient am Standort des Wanderers ist also gerundet $\begin{pmatrix} 0.25 \\ -0.245 \end{pmatrix}$.
Auf einem Kompass entspricht die Richtung des Gradienten ungefähr

$$
90^\circ - \arctan\left(\frac{-0.245}{0.25}\right)^\circ \approx 134.42^\circ \ .
$$

(Wir müssen hier um 90° verschieben, da der Kompass im Norden auf 0° steht, mathematisch befindet sich jedoch der Winkel 0 in der Ebene *rechts*, d. h. beim Punkt $(1, 0)$.)
Die Richtung des steilsten Abstiegs ist immer dem Gradienten entgegengesetzt, also auf dem Kompass etwa bei 314.42° (fast genau Nordwesten). Das gesuchte Gefälle entspricht der Richtungsableitung in die Richtung des steilsten Abstiegs. Den Gradienten $\mathbf{grad}\, f(x_0, y_0)$ haben wir oben berechnet, also berechnen wir nun das Skalarprodukt von Gradient und Einheitsrichtung:

$$
\begin{pmatrix} 0.25 \\ -0.245 \end{pmatrix} \cdot \frac{\begin{pmatrix} -0.25 \\ 0.245 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -0.25 \\ 0.245 \end{pmatrix} \right\|} = -\sqrt{0.25^2 + 0.245^2} \approx -0.35 \ .
$$

(Das haben wir erwartet, da die Richtung des steilsten Abstiegs ja ungefähr Nordwesten ist.)

7. Wir untersuchen die Funktion

$$
f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 4y.
$$

a) Veranschauliche f mit Hilfe der Schnitte

$$S_{x=x_0}, \qquad x_0 \in \{-2,-1,0,1,2\}$$

und

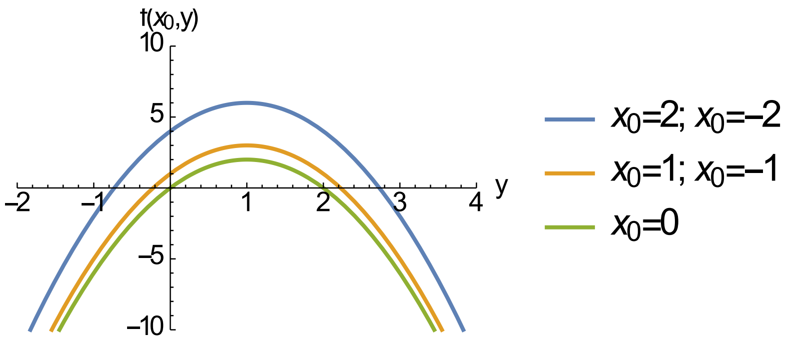
$$S_{y=y_0}, \qquad y_0 \in \{-2,-1,0,1,2\}.$$

(D.h., setze die Werte x_0 bzw. y_0 in die Funktion ein und zeichne die entstehende Kurve. Dieses Vorgehen heisst *Schnitt*, weil man wie mit einem Messer entlang der Ebene $x = x_0$ bzw. $y = y_0$ schneidet.)

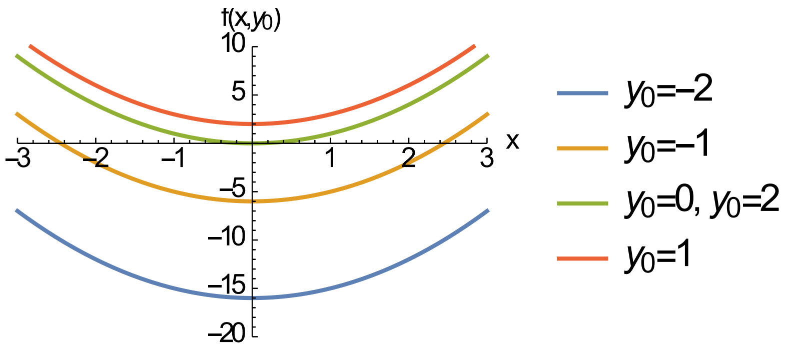
Lösung

Wir setzen die festen x- bzw. y-Werte ein:

$$\begin{aligned}
S_{x=-2}: &\qquad f(-2,y) = 4 - 2y^2 + 4y = -2(y-1)^2 + 6 \\
S_{x=-1}: &\qquad f(-1,y) = 1 - 2y^2 + 4y = -2(y-1)^2 + 3 \\
S_{x=0}: &\qquad f(0,y) = -2y^2 + 4y = -2(y-1)^2 + 2 \\
S_{x=1}: &\qquad f(1,y) = 1 - 2y^2 + 4y = f(-1,y) \\
S_{x=2}: &\qquad f(2,y) = 4 - 2y^2 + 4y = f(-2,y)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
S_{y=-2}: &\qquad f(x,-2) = x^2 - 16 \\
S_{y=-1}: &\qquad f(x,-1) = x^2 - 6 \\
S_{y=0}: &\qquad f(x,0) = x^2 \\
S_{y=1}: &\qquad f(x,1) = x^2 + 2 \\
S_{y=2}: &\qquad f(x,2) = x^2 = f(x,0)
\end{aligned}$$



b) Skizziere die Niveaulinien.

Lösung

Die Niveaulinien sind gegeben durch $c \stackrel{!}{=} f(x,y) = x^2 - 2(y-1)^2 + 2$. Definiere der Einfachheit halber $\tilde{c} := c - 2$. Damit folgt

$$\tilde{c} = x^2 - 2(y-1)^2,$$

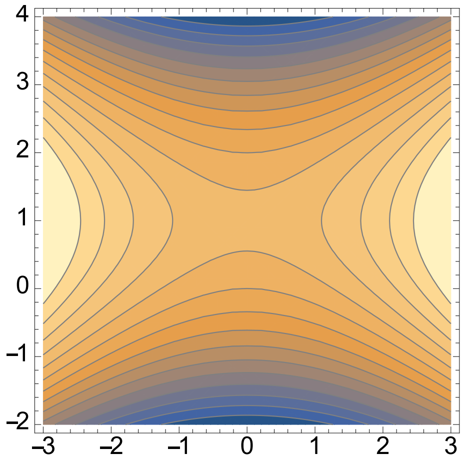
resp. für $\tilde{c} \neq 0$

$$1 = \frac{x^2}{\tilde{c}} - \frac{(y-1)^2}{\tilde{c}/2}.$$

Die Niveaulinien sind für $\tilde{c} \neq 0$ also Hyperbeln mit $(0,1)$ als Mittelpunkt. Dabei gilt

$$\begin{aligned} \tilde{c} > 0: &\quad \text{Öffnung links-rechts;} \\ \tilde{c} < 0: &\quad \text{Öffnung oben-unten.} \end{aligned}$$

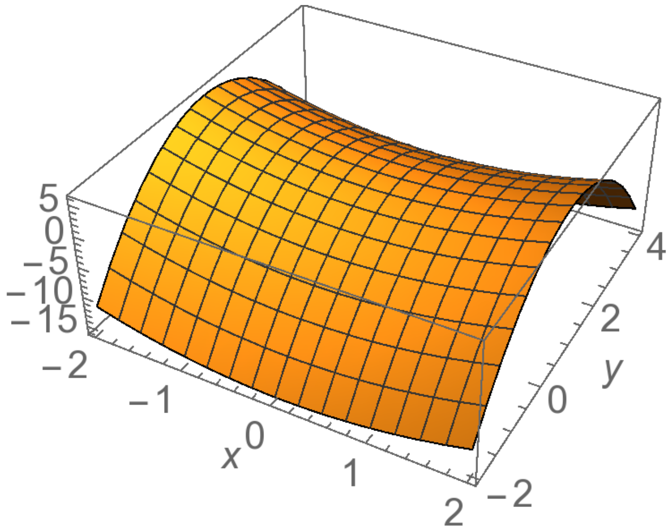
Für $\tilde{c} = 0$ erhält man gerade die Asymptoten dieser Hyperbeln, nämlich die Geraden $x - \sqrt{2}y = -\sqrt{2}$ und $x + \sqrt{2}y = \sqrt{2}$.



c) Skizziere den Graphen von f, d. h. die Fläche $z = f(x,y)$.

Lösung

Mit den Teilaufgaben **a)** und **b)** sollte dies möglich sein.



d) Bestimme einen Punkt (x_0, y_0), so dass die Tangentialebene an $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ parallel zur xy-Ebene liegt.

Lösung

Die Tangentialebene an einen Punkt $P = (x_0, y_0)$ ist gegeben durch

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Damit die Ebene horizontal liegt, muss sie von der Form $z = d$ sein, d. h. es muss $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ gelten. Mit

$$f_x(x_0, y_0) = 2x_0, \quad f_y(x_0, y_0) = -4y_0 + 4$$

folgt also $x_0 = 0$ und $y_0 = 1$. In der Skizze entspricht das dem tiefsten Punkt des Sattels.

e) Wo durchstösst die Verlängerung der Flächennormalen durch $(1, 2, f(1, 2))$ die xy-Ebene?

Lösung

Mit der Formel aus Teilaufgabe **d)** folgt für die Flächennormale

$$\vec{n}(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Der Punkt P ist gegeben durch $P = (1, 2, f(1, 2)) = (1, 2, 1)$ und somit also $\vec{n}(1, 2) = (2, -4, -1)^T$. Die Gerade durch P in Richtung $\vec{n}$ ist also gegeben durch

$$P + t \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Diese Gerade stösst durch die xy-Ebene, wenn ihr z-Eintrag gleich 0 ist, also für $t = 1$. Folglich gilt $x = 3$ und $y = -2$. Der gesuchte Durchstosspunkt ist $(3, -2, 0)$.

8. Gegeben ist die Funktion

$$f : (x, y) \longmapsto \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

a) Bestimme den (aufgrund der gegebenen Formel grösstmöglichen) Definitionsbereich sowie den (zugehörigen) Wertebereich von f.

Lösung

Zunächst bestimmen wir den Definitionsbereich $D(f) \subseteq \mathbb{R}^2$. Für $(x, y) \neq (0, 0)$ ist $x^2 + y^2 > 0$ und somit ist $f(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ eine eindeutige, reelle Zahl. Für $(x, y) = (0, 0)$ ist $f(x, y)$ nicht definiert. Also gilt $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Den Wertebereich $W(f) \subseteq \mathbb{R}$ bestimmen wir wie folgt. Es gilt $f(1, 0) = 0$ und für $a \neq 0$ ist $f\big(0, \frac{1}{a}\big) = a$. Also bekommen wir jeden Wert in $\mathbb{R}$ als Bildpunkt unter f, damit $W(f) = \mathbb{R}$.

b) Diskutiere die Niveaulinien von f und zeichne sie für die Funktionswerte -1, -0.5, 0, 0.5 und 1 auf.

Lösung

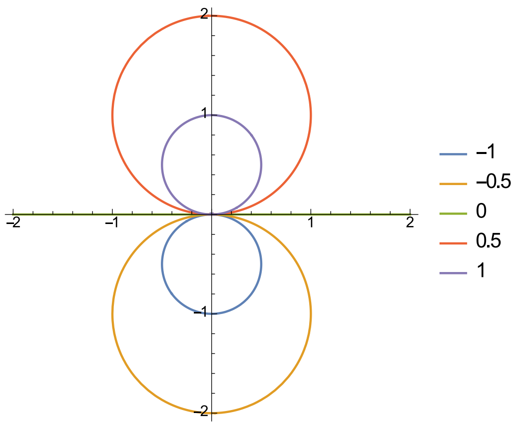
Für die Niveaulinien setzen wir $\frac{y}{x^2+y^2} = c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$, d. h. $(x^2 + y^2) \cdot c = y$.

Im Fall $c = 0$ ist die Niveaulinie die x-Achse ohne den Punkt $(0, 0)$.

Im Fall $c \neq 0$ schreiben wir $x^2 + y^2 - \frac{y}{c} = 0$, ergänzen quadratisch und erhalten

$$x^2 + \Big(y - \frac{1}{2c}\Big)^2 = \frac{1}{4c^2}, \qquad \text{für } (x, y) \neq (0, 0).$$

Das ist der Kreis mit Mittelpunkt $M\big(0, \frac{1}{2c}\big)$ und Radius $r = \frac{1}{2|c|}$ ohne den Punkt $(0, 0)$.



c) Berechne die lineare Ersatzfunktion von f im Punkt $(1, 1)$.

Lösung

Gemäss Definition ist die lineare Ersatzfunktion (oder Tangentialebene) von f im Punkt (x_0, y_0) gegeben durch

$$L_f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

In unserem Fall berechnen wir

$$f_x(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\,, \quad f_y(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

also

$$f_x(1,1) = -\frac{1}{2}\,, \quad f_y(1,1) = 0.$$

Die gesuchte Funktion hat also die Form

$$L_f(x,y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-1) = 1 - \frac{x}{2}$$

und hängt nicht von y ab.

d) Die Grössen x und y seien in der Nähe von $(1,1)$ und werden auf 1% genau gemessen. Schätze den relativen Fehler der Grösse $z = f(x,y)$ ab.

Lösung

Wir berechnen das totale Differential von f zu

$$df(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)dx + f_y(x_0,y_0)dy = \frac{-2x_0y_0}{(x_0^2+y_0^2)^2}dx + \frac{x_0^2-y_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^2}dy.$$

Wir teilen durch die absolute Grösse $z = f(x_0,y_0)$, um den relativen Fehler zu bekommen:

$$\left|\frac{df}{f}\right| = \left|\frac{f_x(x_0,y_0)dx + f_y(x_0,y_0)dy}{f(x_0,y_0)}\right| = \left|\frac{\frac{-2x_0y_0}{(x_0^2+y_0^2)^2}dx + \frac{x_0^2-y_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^2}dy}{\frac{y_0}{x_0^2+y_0^2}}\right|$$

$$\leq \frac{2x_0^2}{x_0^2+y_0^2}\left|\frac{dx}{x_0}\right| + \frac{|x_0^2-y_0^2|}{x_0^2+y_0^2}\left|\frac{dy}{y_0}\right|.$$

Dabei haben wir die Dreiecksungleichung benutzt. Setzen wir nun $(x_0,y_0) = (1,1)$ ein, so erhalten wir

$$\left.\frac{df}{f}\right|_{(1,1)} \leq \frac{2}{2}\left|\frac{dx}{x_0}\right| + 0\left|\frac{dy}{y_0}\right| = \left|\frac{dx}{x_0}\right|.$$

Da wir x (und y) auf 1% genau messen, ist $\left|\frac{dx}{x_0}\right| = 1\%$; folglich wird auch z auf mindestens 1% genau gemessen.

Dies gilt jedoch nur, wenn wir nahe genug am Punkt $(1,1)$ sind; in anderen Punkten kann die Linearisierung schlechter oder besser sein. Dass ein Messfehler in der y-Komponente keinen Einfluss auf den Messfehler von z hat, ist plausibel, denn schliesslich hängt die Linearisierung L_f ebenfalls nicht von y ab.

e) Berechne alle zweiten partiellen Ableitungen von f und überprüfe den Satz von Schwarz.

Lösung
Wir berechnen

$$
\begin{aligned}
f_{xx} = (f_x)_x &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right) = \frac{(-2y)(x^2+y^2)^2 - (-2xy)\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^4} \\
&= \frac{-2x^2y - 2y^3 + 8x^2y}{(x^2+y^2)^3} = \frac{(6x^2-2y^2)y}{(x^2+y^2)^3}; \\
f_{xy} = (f_x)_y &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right) = \frac{(-2x)(x^2+y^2)^2 - (-2xy)\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^4} \\
&= \frac{-2x^3 - 2xy^2 + 8xy^2}{(x^2+y^2)^3} = \frac{(6y^2-2x^2)x}{(x^2+y^2)^3}; \\
f_{yx} = (f_y)_x &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = \frac{2x(x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2)\cdot 2(x^2+y^2)2x}{(x^2+y^2)^4} \\
&= \frac{2x^3 + 2xy^2 - 4x^3 + 4xy^2}{(x^2+y^2)^3} = \frac{(-2x^2+6y^2)x}{(x^2+y^2)^3}; \\
f_{yy} = (f_y)_y &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = \frac{(-2y)(x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2)\cdot 2(x^2+y^2)2y}{(x^2+y^2)^4} \\
&= \frac{-2x^2y - 2y^3 - 4x^2y + 4y^3}{(x^2+y^2)^3} = \frac{(-6x^2+2y^2)y}{(x^2+y^2)^3}.
\end{aligned}
$$

Wie man sieht, gilt $f_{xy} = f_{yx}$, was der Satz von Schwarz besagt.

9. Bestimme die (globalen) Extrema der Funktion

$$f(x,y) = xy\,(2x-5y)$$

auf dem abgeschlossenen Quadrat mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,2)$, $(2,0)$.

Lösung
Wir betrachten $f(x,y) = 2x^2y - 5xy^2$ im Quadrat $[0,2]\times[0,2]$. Da die Funktion f überall differenzierbar ist, sind die Randpunkte und die gemeinsamen Nullpunkte der Ableitungen nach x und y im Inneren des Definitionsbereiches (d.h. in $(0,2)\times(0,2)$) zu untersuchen.

- Im Inneren erhalten wir:

  $$f_x(x,y) = 4xy - 5y^2 \quad \text{und} \quad f_y(x,y) = 2x^2 - 10xy.$$

  Aus $f_x(x,y) = 0$ folgt $y(4x-5y) = 0$, also gilt entweder $y = 0$ oder $4x = 5y$.
  Aus $f_y(x,y) = 0$ folgt $x(2x-10y) = 0$, also gilt entweder $x = 0$ oder $2x = 10y$.
  Da diese Bedingungen gleichzeitig erfüllt sein müssen, erhalten wir $x = y = 0$, aber $(0,0) \notin (0,2)\times(0,2)$. Deshalb sind keine Extremalstellen im Inneren.
- Auf dem Rand betrachten wir separat die Punkte im "Inneren" des Randes und die Eckpunkte:
  - Wenn $(x,y) \in \{0\}\times(0,2)$, dann ist $f(0,y) = 0$ konstant. Daher sind alle Punkte in diesem Teil des Randes Kandidaten.

- Wenn $(x, y) \in \{2\} \times (0, 2)$, dann ist $f(2, y) = 8y - 10y^2$. Wir bestimmen die möglichen Extrema von $y \mapsto f(2, y)$ als Funktion einer Variablen. Nach Nullsetzen der Ableitung $8 - 20y$ dieser Funktion erhalten wir $y = \frac{2}{5}$ und damit als Kandidaten den Punkt $(2, \frac{2}{5})$, mit $f(2, \frac{2}{5}) = \frac{8}{5}$.
- Wenn $(x, y) \in (0, 2) \times \{0\}$, dann ist $f(x, 0) = 0$ konstant. Daher sind alle Punkte in diesem Teil des Randes Kandidaten.
- Wenn $(x, y) \in (0, 2) \times \{2\}$, dann ist $f(x, 2) = 4x^2 - 20x$. Wir bestimmen die möglichen Extrema von $x \mapsto f(x, 2)$ als Funktion einer Variablen. Nach Nullsetzen der Ableitung $8x - 20$ dieser Funktion erhalten wir $x = \frac{5}{2}$ und damit als Kandidaten den Punkt $(\frac{5}{2}, 2)$, der nicht zum Definitionsbereich gehört. Daher liegt auf diesem Teil des Randes keine Extremalstelle.
- Für die Eckpunkte haben wir $f(0, 0) = f(0, 2) = f(2, 0) = 0$ und $f(2, 2) = -24$.

Wir vergleichen nun alle Kandidaten für Extremalwerte miteinander und finden:

- Globales Maximum: $\frac{8}{5}$ im Punkt $(2, \frac{2}{5})$; und
- Globales Minimum: -24 im Punkt $(2, 2)$.

10. Bestimme die (globalen) Extrema der Funktion

$$g(x, y) = 3y^2 - 1 - 2x^2$$

im Bereich

$$B = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 4\big\}.$$

Lösung
Da g überall differenzierbar ist, müssen wir nur die Punkte im Inneren mit verschwindendem Gradienten und den Rand betrachten.
Für Extremalstellen im Innern des Gebiets B gilt $\mathbf{grad}\, g(x, y) = (0, 0)$, also

$$\mathbf{grad}\, g(x, y) = \begin{pmatrix} -4x \\ 6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = 0 \text{ und } y = 0.$$

Für Punkte auf dem Rand $\partial B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 4\}$ wählt man eine Parameterdarstellung von ∂B aus, z. B.

$$\vec{r}(t) = (2\cos t,\ 2\sin t),\ t \in [0, 2\pi]$$

und erhält für die Funktion auf dem Rand

$$g|_{\partial B} = g\big(\vec{r}(t)\big) = 12\sin^2 t - 1 - 8\cos^2 t = 20\sin^2 t - 9.$$

Für die Extremalstellen auf dem Rand gilt dann

$$\frac{d}{dt}\big(20\sin^2 t - 9\big) = 40\sin t\,\cos t = 20\sin(2t) = 0 \iff t \in \Big\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\Big\}.$$

Man erhält also folgende Kandidatenliste für die Extremalpunkte:

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
(x,y)	$(0,0)$	$(2,0)$	$(0,2)$	$(-2,0)$	$(0,-2)$
$g(x,y)$	-1	-9	11	-9	11

Das Minimum beträgt -9 und wird auf dem Rand in den Punkten $(\pm 2, 0)$ angenommen. Das Maximum beträgt 11 und wird auf dem Rand in den Punkten $(0, \pm 2)$ angenommen.

Keine Abgabe der schriftlichen Aufgaben. Die Lösungen werden am 23. Dezember veröffentlicht. Die Multiple-Choice-Aufgaben sind online einzureichen.