Lösung: Schnellübung 2

1. Wir verwenden den Zwischenwertsatz. Wir bemerken zunächst, dass die (ganzrationale) Funktion

$$f(x) = \frac{2}{(x+1)^4} + \frac{3}{(x-1)^9}$$

im Intervall $(-1, 1)$ wohldefiniert und stetig ist. Gesucht ist eine Nullstelle dieser Funktion. Wir stellen fest, dass (beispielsweise)

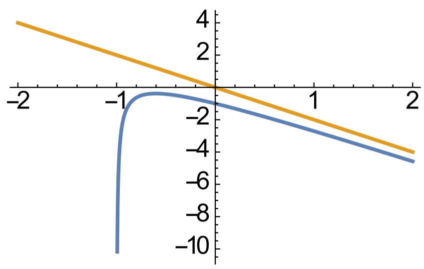
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{(3/2)^4} + \frac{3}{(-1/2)^9} = 2^5\left(\frac{1}{3^4} - 3 \cdot 2^4\right) < 0,$$

denn offensichtlich ist $3 \cdot 2^4 > \frac{1}{3^4}$. Andererseits gilt

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{(1/2)^4} + \frac{3}{(-3/2)^9} = 2^5\left(1 - \frac{2^4}{3^8}\right) > 0,$$

denn es ist $2^4 < 3^8$ und damit $\frac{2^4}{3^8} < 1$. Wir haben damit $f(1/2) < 0 < f(-1/2)$ mit der stetigen Funktion f. Nach dem Zwischenwertsatz existiert also ein $x \in (-1/2, 1/2) \subset (-1, 1)$ mit $f(x) = 0$.

2.a) Für $x \to \infty$ geht $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ gegen 0. Somit ist eine Asymptote gegeben durch $y = -2x$.



b) Mit Polynomdivision bekommen wir

$$\begin{array}{r} (3x^3 - x + 2) \\ \underline{-(3x^3 + 9x^2 - 12x)} \\ -9x^2 + 11x + 2 \\ \underline{-(-9x^2 - 27x + 36)} \\ 38x - 34 \end{array} \quad : \quad (x^2 + 3x - 4) = 3x - 9, \quad \text{Rest } 38x - 34.$$

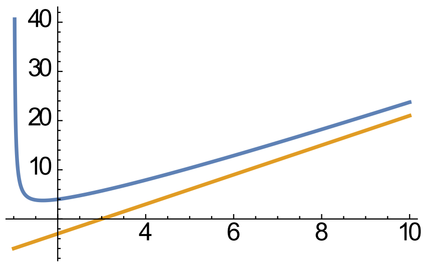
Folglich gilt

$$g(x) = \frac{3x^3 - x + 2}{x^2 + 3x - 4} = 3x - 9 + \frac{38x - 34}{x^2 + 3x - 4}.$$

Sei $k(x) := 3x - 9$, so gilt

$$\lim_{x\to\infty} (g(x) - k(x)) = \lim_{x\to\infty} \frac{38x - 34}{x^2 + 3x - 4} = 0.$$

Also ist $3x - 9$ eine Asymptote von f.



3. a) $f(g(x)) = 2g(x) + 1 = 2\log(x+3) + 1.$

b) $g(h(x) - 3) = \log(h(x) - 3 + 3) = \log(e^{4x+7}) = 4x + 7.$

c) $f(g(h(x))) = 2g(h(x)) + 1 = 2\log(h(x) + 3) + 1 = 2\log(e^{4x+7} + 3) + 1.$

d)
$$\begin{aligned} h(g(f(x))) &= e^{4g(f(x))+7} = e^{4\log(f(x)+3)+7} = e^{4\log(2x+1+3)+7} \\ &= e^{4\log(2x+4)} \cdot e^7 = e^{\log((2x+4)^4)} \cdot e^7 = (2x+4)^4 \cdot e^7 \\ &= 16e^7 \cdot (x+2)^4. \end{aligned}$$

4. a) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt[5]{(1-7x)^2}}\right) = \frac{d}{dx}\left((1-7x)^{-\frac{2}{5}}\right) = -\frac{2}{5} \cdot (1-7x)^{-\frac{7}{5}} \cdot (-7) = \frac{14}{5}(1-7x)^{-\frac{7}{5}}.$

b) Die Ableitung ist null, da die Funktion konstant ist, d.h. sie ist unabhängig von x.

c) Da $\arccos(x)$ die Umkehrfunktion von $\cos(x)$ ist, gilt

$$\cos^2\left(\arccos\sqrt{x}\right) = \left(\cos(\arccos\sqrt{x})\right)^2 = (\sqrt{x})^2 = x.$$

Die gegebene Funktion ist also die Identität $x \mapsto x$ mit Ableitung 1.

d)
$$\frac{d}{dx}\left((\cot x)^3\right) = 3(\cot x)^2 \frac{d}{dx}(\cot x).$$

Wegen $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ und

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad \text{oder} \quad -1 - (\cot x)^2$$

ergibt sich für die Ableitung also

$$-3\cot^2 x \cdot \frac{1}{\sin^2 x} = -3 \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} \quad \text{oder} \quad -3\cot^2 x \cdot \left(1 + \cot^2 x\right).$$

e) Mit der Quotientenregel erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x}\,(\sin x + x^2)}{1-x}\right) &= \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sin x + x^2) + \sqrt{x}\,(\cos x + 2x)\right)(1-x) - \sqrt{x}\,(\sin x + x^2) \cdot (-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{-3x^3 + 5x^2 + (-2x^2 + 2x)\cos x + (x+1)\sin x}{2\sqrt{x}\,(x-1)^2}. \end{aligned}$$

f) $\frac{d}{dx}(\cos(\sin x) - \sin(\cos x)) = -\sin(\sin x) \cdot \cos x + \cos(\cos x) \cdot \sin x.$

g) $\frac{d}{dx}\left(\cot(x^3)\right) \overset{d)}{=} \left(-1 - \left(\cot(x^3)\right)^2\right) \cdot (3x^2) = -3x^2\left(1 + \cot^2(x^3)\right).$