Serie 9

1. Die Funktion $f(x) = x \cdot e^x + 7$ ist...

i) die Ableitung der Funktion $g_1(x) = \frac{1}{2}x^2 \cdot e^x + 7x$.
ii) eine Stammfunktion der Funktion $g_2(x) = e^x$.
iii) die Ableitung der Funktion $g_3(x) = e^x + 7x$.
iv) eine Stammfunktion der Funktion $g_4(x) = e^x + x \cdot e^x$.
v) Alle obigen Aussagen sind falsch.

2. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion mit $f(x) = \displaystyle\int_3^x \sin(t)\,dt$. Wie lautet die Ableitung von f?

i) $f'(x) = \cos(x)$
ii) $f'(x) = \sin(x)$
iii) $f'(x) = \cos(x) - \cos(3)$
iv) $f'(x) = \sin(x) - \sin(3)$
v) f ist für $x = 3$ nicht differenzierbar, also ist die Ableitung nicht überall definiert.

3. Seien F bzw. G Stammfunktionen von f bzw. $g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

i) FG ist eine Stammfunktion von $fG + Fg$.
ii) Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann ist $F + c$ eine Stammfunktion von f.
iii) FG ist eine Stammfunktion von fg.
iv) $F + G$ ist eine Stammfunktion von $f + g$.

4. Wir rechnen

$$\begin{aligned} f(x) = (x-1)^4 &= \int 4(x-1)^3\,dx = \int (4x^3 - 12x^2 + 12x - 4)\,dx \\ &= x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x = g(x) \end{aligned}$$

und erhalten durch Einsetzen $1 = f(0) = g(0) = 0$. Wo liegt der Fehler?

i) Die Integrationskonstante fehlt.
ii) Die binomische Formel wurde falsch angewendet.
iii) Es ist trotzdem richtig, weil man Konstanten vernachlässigen darf.
iv) Man darf nicht einsetzen.
v) Weder f noch g sind Lipschitz-stetig.

5. Sei $f(x) = \displaystyle\int_\pi^x \cos(\cos t)\,dt$. Dann ist $(f^{-1})'(0)$ gegeben durch

i) $\frac{\pi}{2}$
ii) -1
iii) $\cos(\cos(x))$
iv) $\frac{1}{\cos(1)}$
v) $\frac{\pi}{\cos(1)}$

6. Bestimme die folgenden Integrale:

a)
$$\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\,dx,$$

b)
$$\int \tan^2 x\,dx,$$

c)
$$\int \tanh^2 x\,dx,$$

d)
$$\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x},$$

e)
$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2}.$$

7. In dieser Aufgabe wollen wir das Integral der Funktion $f(x) = e^x$ im Intervall $[0,1]$ mit Hilfe der Riemannschen Summe berechnen.

a) Berechne die n-te Untersumme U_n von f in $[0,1]$.
(Benutze eine Unterteilung in gleich breite Intervalle.)

b) Berechne die n-te Obersumme O_n von f in $[0,1]$.

c) Zeige, dass $|O_n - U_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.
(Das bedeutet, dass die Funktion e^x auf $[0,1]$ Riemann-integrierbar ist.)

d) Berechne $\displaystyle\int_0^1 e^x\,dx$ auf drei Arten.

8. Die Funktion $f(x) := \sqrt{x}$ soll im Intervall $[0,1]$ derart durch eine lineare Funktion $\tilde{f}(x) := x + c$ approximiert werden, dass das Integral

$$\int_0^1 \left(f(x) - \tilde{f}(x)\right)^2\,dx$$

minimal wird (es heisst *quadratisches Fehlerintegral*). Bestimme c, $\tilde{f}$ und den Fehler.

9. a) Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Zeige, dass f Lipschitz-stetig ist (d. h., es gibt eine Konstante $L \geq 0$ mit $|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$ für alle $x, y \in [a,b]$).
Hinweis: Benutze den Mittelwertsatz der Differentialrechnung oder den Hauptsatz der Infinitesimalrechnung.

b) Zeige, dass die Wurzelfunktion $f\colon [0,1] \to [0,1]$, $f(x) := \sqrt{x}$ nicht Lipschitz-stetig ist.

c) Finde die beste (d. h. die kleinste) Lipschitz-Konstante für die Funktion $f\colon [0,1] \to [0,1]$, $f(x) := x^2$.

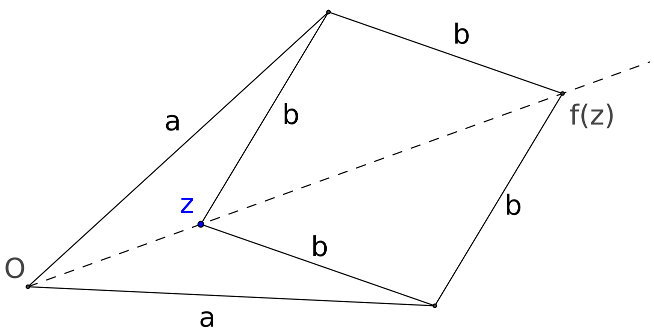
10. Die Abbildung

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}\,, \quad f(z) := 1/\overline{z}$$

heisst *Inversion am Einheitskreis.*

a) Zeige: Es gilt $f \circ f = id$ (d. h. f ist eine *Involution*), $\arg f(z) = \arg z$ und $|w| = |z| \Rightarrow |f(w)| = |f(z)|$, $\forall w, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

b) Zeige, dass der abgebildete Mechanismus die Abbildung f realisiert (auf einer Teilmenge von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$), sofern die Längen a und b die Beziehung $a^2 = b^2 + 1$ erfüllen.



Hierbei sind die durchgezogenen Strecken bewegliche, mit Gelenken verbundene Stäbe; die gestrichelte Linie ist nur eine Hilfslinie; der Punkt O ist der Ursprung des Koordinatensystems.
Hinweis: Betrachte zuerst nur den Fall $z \in \mathbb{R}$ und benutze Elementargeometrie.

c) Es sei $\frac{a-b}{2} < r < \frac{1}{2}$ gegeben. Zeige: Bewegt sich $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ auf dem Kreis $|z-r| = r$, so bleibt $f(z)$ auf der Geraden $\operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{2r}$.
Hinweis: Berechne $z\overline{z}$ mittels $(z-r)(\overline{z}-r) = |z-r|^2 = r^2$ und setze in $f(z) = \frac{z}{z\overline{z}}$ ein.
Weitere Informationen und eine Animation des Mechanimus' sind unter `https://de.wikipedia.org/wiki/Inversor_von_Peaucellier` zu finden.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben am Mittwoch, 25. November 2015 in der Vorlesung. Die Multiple-Choice-Aufgaben sind online einzureichen.