Lösung: Serie 3

1. ☐ (1) ist injektiv

   ☑ (2) ist injektiv

   ☐ (3) ist injektiv

   ☑ (4) ist injektiv

   ☐ (5) ist injektiv

   ☐ (1) ist surjektiv

   ☑ (2) ist surjektiv

   ☐ (3) ist surjektiv

   ☐ (4) ist surjektiv

   ☑ (5) ist surjektiv

   (1) ist überhaupt kein Graph einer Funktion, weil verschiedene y-Koordinaten mit derselben x-Koordinate auftreten.
   In (3) und (5) treten verschiedene x-Koordinaten mit derselben y-Koordinate auf; diese Funktionen sind also nicht injektiv.
   Für (2) und (4) tritt dieses Problem nicht auf; jeder y-Wert (der angenommen wird) entspricht eindeutig einem x-Wert. Deshalb sind beide ein Graph einer injektiven Funktion.
   (1) stellt immer noch keine Funktion dar (also auch keine surjektive).
   Bei (3) und (4) wird jeweils nicht das ganze Intervall $[c, d]$ in y-Richtung getroffen, also sind diese Funktionen nicht surjektiv.
   In (2) und (5) jedoch wird jeder Wert in $[c, d]$ von mindestens einem x angenommen. Folglich sind diese beiden ein Graph einer surjektiven Funktion.
   Bemerkung: Insgesamt ist also nur (2) bijektiv und besitzt eine Umkehrfunktion.

2. ☐ $f_1(\varphi) := (\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0)$

   ☑ $f_2(\varphi) := (\cos(\varphi), \sin(\varphi), \sin(\varphi/2))$

   ☐ $f_3(\varphi) := (\cos(\varphi), \sin(\varphi), \sin(\varphi))$

   ☐ $f_4(\varphi) := (\cos(\varphi), \sin(\varphi), \sin(2\varphi))$

   ☐ Keine der obigen.

Seien $\varphi, \varphi' \in I$ gegeben, die $f_i(\varphi) = f_i(\varphi')$ erfüllen. In jedem der vier Fälle gilt dann $(\cos\varphi, \sin\varphi) = (\cos\varphi', \sin\varphi')$; das heisst φ und φ' repräsentieren denselben Punkt auf der Kreislinie. Folglich ist $\varphi' - \varphi$ ein ganzzahliges Vielfaches von 2π.
Falls $\varphi \neq \varphi'$ ist, sei oBdA φ' die grössere der beiden Zahlen; dann bleibt wegen $0 < \varphi < \varphi' < 4\pi$ nur noch die Möglichkeit $\varphi' = \varphi + 2\pi$ mit $0 < \varphi < 2\pi$. In den Fällen $i = 1, 3, 4$ ist für alle $0 < \varphi < 2\pi$ auch der dritte Eintrag von $f_i(\varphi') = f_i(\varphi + 2\pi)$ gleich dem von $f_i(\varphi)$, d.h. es gilt tatsächlich $f_i(\varphi) = f_i(\varphi')$. Also sind diese Funktionen nicht injektiv.
Im Fall $i = 2$ dagegen folgt aus $f_2(\varphi) = f_2(\varphi') = f_2(\varphi + 2\pi)$, dass $\sin(\varphi/2) = \sin(\varphi/2 + \pi) = -\sin(\varphi/2)$ ist, und daher $\sin(\varphi/2) = 0$. Somit ist $\varphi/2$ ein ganzzahliges Vielfaches von π, also φ ein ganzzahliges Vielfaches von 2π. Wegen $0 < \varphi < 2\pi$ ist dies aber bereits ausgeschlossen, so dass wir einen Widerspruch erreicht haben. Folglich ist $f_2(\varphi) \neq f_2(\varphi')$ für je zwei verschiedene $\varphi, \varphi' \in I$, und daher ist f_2 injektiv.

3. ☐ $[0, 2]$

☐ $[-2, 2]$

☑ $[1, 2]$

☐ $[1, \pi^2 + 1]$

☐ $[0, 4\pi]$

Auf dem Definitionsbereich $[0, 4\pi]$ nimmt die Funktion $\sin(x)$ alle Werte in $[-1, 1]$ an, und nur diese. Also nimmt $\sin^2 x$ darauf genau die Werte in $[0, 1]$ an, und somit nimmt f genau die Werte in $[1, 2]$ an.

4. ☐ $f^{-1}(x) = \frac{1}{x^3+1}$

☐ $f^{-1}(x) = x^3 - 1$

☐ $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^3 + 1}$

☑ $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

☐ Die inverse Funktion existiert nicht.

Die Funktion ist streng monoton wachsend, also injektiv. Des Weiteren ist sie surjektiv, da bereits $x \mapsto x^3$ surjektiv ist (Addition einer Konstanten verschiebt die reelle Zahlengerade nur.) Folglich ist sie invertierbar.
Wir lösen $y = x^3 + 1$ nach x auf und erhalten $x = \sqrt[3]{y-1}$. Vertauschen von x und y ergibt $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$.
Wir können aber auch direkt nachprüfen, ob $f(f^{-1}(x)) = x = f^{-1}(f(x))$ gilt. Dies ist nur für $\sqrt[3]{x-1}$ korrekt:

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(x)) &= \left(\sqrt[3]{x-1}\right)^3 + 1 = x - 1 + 1 = x \\ \text{und} \quad f^{-1}(f(x)) &= \sqrt[3]{x^3+1-1} = \sqrt[3]{x^3} = x. \end{aligned}$$

Bemerkung: Da die dritte Wurzel in $\mathbb{R}$ immer existiert, folgt aus der Wohldefiniertheit der inversen Funktion automatisch, dass f bijektiv ist.

5. ☐ $x \mapsto |x| + x$

☐ $x \mapsto x^3 - x$

☑ $x \mapsto e^x$

☐ $x \mapsto \arccos x$

☐ $x \mapsto x^2$

☐ Keine.

Option 1: Die Funktion $|x| + x$ ist gleich Null für negative x, weil dort der Betrag gleich $-x$ ist. Also ist die erste Funktion für negative x konstant und scheidet aus.
Option 2: Wir untersuchen $x \mapsto x^3 - x$: wenn wir die x-Werte $\frac{1}{2}$ und 0 einsetzen, so erhalten wir

$$(\tfrac{1}{2})^3 - \tfrac{1}{2} = -\tfrac{3}{8} \qquad \text{und} \qquad 0^3 - 0 = 0,$$

also ist die Funktion bei $\frac{1}{2}$ kleiner als bei 0, folglich nicht monoton wachsend.
Option 3: Die Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$ ist streng monoton wachsend: Für $x \in \mathbb{R}$ und $h > 0$ gilt

$$e^{x+h} - e^x = e^x(e^h - 1),$$

und es ist $e^x > 0$ sowie $e^h = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} > 1 + h > 1$, also $e^{x+h} - e^x > 0$.
Option 4: Die Funktion $x \mapsto \arccos x$ ist gemäss der Vorlesung streng monoton fallend, da sie die Umkehrfunktion von $\cos\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$ ist: Dort ist der Kosinus streng monoton fallend.
Option 5: Auf $(-1, 0]$ ist x^2 streng monoton fallend: für $x < y \leq 0$ gilt

$$x^2 - y^2 = \underbrace{(x+y)}_{<0}\underbrace{(x-y)}_{<0} > 0,$$

also folgt $x^2 > y^2$.

6. a) Beachte, dass f als die Verkettung von Koordinatentransformationen mit der Standardparabel $x \mapsto x^2$ entsteht, denn $f(x) = -2x^2+8x+3 = -2(x-2)^2+11$.
Nun ist x^2 strikt monoton wachsend für $x \geq 0$ (und sonst nicht),
also ist $(x-2)^2$ strikt monoton wachsend für $x \geq 2$,
also ist $-(x-2)^2$ strikt monoton fallend für $x \geq 2$.
Somit ist die Funktion f strikt monoton fallend auf $[2, \infty)$.
Es gilt $f(2) = 11$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, nach dem Zwischenwertsatz ist also der Wertebereich von f gleich $(-\infty, 11]$.
Wir lösen die Gleichung $y = f(x) = -2(x-2)^2 + 11$ nach x auf und erhalten $x = \sqrt{-\frac{y-11}{2}} + 2$. Die Umkehrfunktion von f lautet demnach

$$\begin{aligned}\left(f|_{[2,\infty)}\right)^{-1} : (-\infty, 11] &\longrightarrow [2, \infty)\\ x &\longmapsto 2 + \sqrt{\tfrac{11-x}{2}}.\end{aligned}$$

b) Die Funktion g ist die Verkettung eines Polynoms und einer Exponentialfunktion. Daher ist sie überall in $\mathbb{R}$ definiert. Sie ist jedoch in diesem Bereich nicht injektiv, denn sie ist gerade. Man kann entweder $(-\infty, 0]$ oder $[0, \infty)$ als Definitionsbereich setzen und g injektiv machen.
Sei also z.B. $g : \ [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$. Man löst jetzt die Gleichung $y = g(x) = 2e^{-x^2}$ nach x und erhält

$$\begin{aligned} y = g(x) = 2e^{-x^2} &\quad\Leftrightarrow\\ \tfrac{y}{2} = e^{-x^2} &\quad\Leftrightarrow\\ \log\left(\tfrac{y}{2}\right) = -x^2 &\quad\Leftrightarrow\\ \pm\sqrt{-\log(\tfrac{y}{2})} = x. &\end{aligned}$$

Da $x \geq 0$ ist wegen der Einschränkung des Definitionsbereiches, nehmen wir die positive Wurzel, das heisst $x = \sqrt{-\log(\frac{y}{2})}$. Damit der Radikand nicht negativ ist, muss $\log(\frac{y}{2}) \leq 0$ sein, also $\frac{y}{2} \leq 1$ sein. Also darf y nicht grösser als 2 sein. Andererseits ist der Logarithmus nur für positive Zahlen definiert, also muss auch $y > 0$ gelten. Da alles Äquivalenzumformungen waren, haben wir den Wertebereich von g bestimmt zum Intervall $(0, 2]$.
Es gilt also $W_g = D_{g^{-1}} = (0, 2]$; $W_{g^{-1}} = D_g = [0, \infty)$ und

$$g^{-1} : \ x \longmapsto \sqrt{-\log\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

c) Die Funktion h ist für $\frac{1+x}{x} > 0$ definiert. Diese Ungleichung gilt, wenn $x \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$. In diesem ganzen Bereich ist h injektiv und deshalb auch invertierbar: denn für $x_1, x_2 \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$ mit $h(x_1) = h(x_2)$ gilt, dass $\frac{1+x_1}{x_1} = \frac{1+x_2}{x_2}$ (wegen der Injektivität des Logarithmus), und somit ist $x_1 = x_2$. Sei also $h: (-\infty, -1) \cup (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$. Man löst jetzt die Gleichung $y = f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$ nach x und erhält

$$\begin{aligned} y = f(x) &= \log\left(\frac{1+x}{x}\right) \quad \Leftrightarrow \\ e^y &= \frac{1+x}{x} \quad \Leftrightarrow \\ xe^y - x &= 1 \quad \Leftrightarrow \\ x &= \frac{1}{e^y - 1}. \end{aligned}$$

Der Nenner darf nicht 0 sein; also darf y auch nicht 0 sein. Deshalb sind $W_h = D_{h^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $W_{h^{-1}} = D_h = (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$ und

$$h^{-1}: x \longmapsto \frac{1}{e^x - 1}.$$

d) Damit $k(x)$ wohldefiniert ist, darf zunächst der innere Radikand $6x + 6$ nicht negativ sein, also müssen wir $x \geq -1$ fordern. Weiterhin muss auch der gesamte Radikand $r(x) := 3x - 2 + 2\sqrt{6x + 6}$ nicht-negativ sein. Der Definitionsbereich dieser Funktion ist $D_r = [-1, \infty)$.
Da die Funktion r streng monoton wachsend ist, ist sie invertierbar. Wir bestimmen nun die inverse Funktion durch Auflösen:

$$\begin{aligned} z = r(x) &= 3x - 2 + 2\sqrt{6x+6} \quad \Leftrightarrow \\ (*) \quad \frac{z - 3x + 2}{2} &= \sqrt{6x+6} \quad \Rightarrow \\ \left(\frac{z - 3x + 2}{2}\right)^2 &= 6x + 6 \quad \Leftrightarrow \\ \frac{9}{4}x^2 + \left(\frac{-6(z+2)}{4} - 6\right)x + \frac{(z+2)^2}{4} - 6 &= 0 \quad \Leftrightarrow \\ x^2 + \frac{4}{9}\left(-\frac{3z}{2} - 9\right)x + \frac{4}{9}\frac{z^2 + 4z - 20}{4} &= 0 \quad \Leftrightarrow \\ x^2 - \left(\frac{2z}{3} + 4\right)x + \frac{z^2 + 4z - 20}{9} &= 0. \end{aligned}$$

Als Kandidaten für Lösungen kommen

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{z}{3}+2\pm\sqrt{\left(\frac{z}{3}+2\right)^2-\frac{z^2+4z-20}{9}} \\ &= \frac{z}{3}+2\pm\sqrt{\frac{8z+56}{9}} = \frac{z}{3}+2\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{z+7} \end{aligned}$$

infrage. Wir müssen nun überprüfen, für welche dieser Lösungen die linke Seite von $(*)$ nicht-negativ ist:

$$\frac{z-3x_{1,2}+2}{2} = \frac{-6\mp 2\sqrt{2}\sqrt{z+7}+2}{2}.$$

Aufgrund der Forderung $z = r(x) \geq 0$ ist dieser Ausdruck nur nicht-negativ für

$$x = x_2 = \frac{z}{3}+2-\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{z+7} = \frac{z+6-2\sqrt{2}\sqrt{z+7}}{3} = r^{-1}(z).$$

Wir kehren zurück zur Forderung, dass $z = r(x)$ nicht negativ sein darf. Da r streng monoton wachsend ist, müssen wir nur nach einer Nullstelle x_0 von r suchen. Diese ist

$$x_0 = r^{-1}(0) = \frac{6-2\sqrt{14}}{3}.$$

Da $x_0 > \frac{6-2\sqrt{16}}{3} = -\frac{2}{3} > -1$ ist, erhalten wir zusammen mit der obigen Forderung den Definitionsbereich von k, nämlich $D_k = [x_0, \infty)$.
Wegen $y = k(x) = \sqrt{r(x)}$ bekommen wir schliesslich $r(x) = y^2$ und

$$x = r^{-1}(y^2) = \frac{y^2+6-2\sqrt{2}\sqrt{y^2+7}}{3} = k^{-1}(y).$$

Der Definitionsbereich von k^{-1} ist gleich dem Wertebereich von k. Wegen $k(x_0) = 0$, $\lim_{x\to\infty} k(x) = +\infty$ und der Stetigkeit von k erhalten wir mit dem Zwischenwertsatz, dass dieser Definitionsbereich $D_{k^{-1}} = [0, \infty)$ ist. Der Wertebereich von k^{-1} ist gleich dem Definitionsbereich von k, also $[x_0, \infty)$.

7.a) In der Vorlesung wurde der Tangens auf dem Invervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ definiert. Wir müssen also ein $x \in D_f$ zunächst in dieses Intervall bringen. Wir nutzen aus, dass der Tangens π-periodisch ist und erhalten $f(x) = \tan(x) = \tan(x-\pi)$ für alle x. Wegen $x \in D_f = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ ist dann $x' := x-\pi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, also gilt nun $\arctan(\tan(x')) = x'$. (Für x gilt dies nicht!) Es folgt

$$\arctan(f(x)) = \arctan(\tan(x-\pi)) = \arctan(\tan(x')) = x' = x-\pi.$$

Schreiben wir $y = f(x)$, so liefert Auflösen der obigen Gleichung $x = \arctan(y)+\pi$. Nun ist der Tangens, und damit f, surjektiv; also kann als Definitionsbereich von f^{-1} ganz $\mathbb{R}$ gewählt werden. Die gesuchte inverse Funktion ist also

$$\begin{aligned} g = f^{-1}\colon \mathbb{R} &\to \left(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2}\right) \\ x &\mapsto \arctan(x)+\pi. \end{aligned}$$

b) Wegen $\cos(x) \in [-1,1]$ liegt das Argument des Tangens $\pi(1+\frac{1}{2}\cos(x))$ in $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$. Da aber der Tangens weder für $\frac{\pi}{2}$ noch für $\frac{3\pi}{2}$ definiert ist, muss auf jeden Fall zunächst $\pi(1+\frac{1}{2}\cos(x)) \in (\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ gelten, also $\cos(x) \in (-1,1)$. Wir erkennen in $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ den Definitionsbereich D_f von f wieder, also den Wertebereich der inversen Funktion g. Folglich können wir schreiben

$$a = \tan(\pi(1+\tfrac{1}{2}\cos(x))) = f(\pi(1+\tfrac{1}{2}\cos(x))).$$

Wir wenden auf beiden Seiten dieser Gleichung die Inverse f^{-1} aus **a)** an und erhalten

$$f^{-1}(a) = f^{-1}(f(\pi(1+\tfrac{1}{2}\cos(x)))) = \pi(1+\tfrac{1}{2}\cos(x)).$$

Es folgt

$$\pi(1+\tfrac{1}{2}\cos(x)) = g(a) = \arctan(a) + \pi,$$

und damit

$$\cos(x) = \tfrac{2}{\pi}\arctan(a).$$

Somit sind alle Lösungen von der Form

$$x = \pm\arccos(\tfrac{2}{\pi}\arctan(a)) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Alternativer Lösungweg: Wegen der π-Periodizität der tan-Funktion ist

$$a = \tan(\pi(1+\tfrac{1}{2}\cos(x))) = \tan(\tfrac{\pi}{2}\cos(x)).$$

Das Argument $\frac{\pi}{2}\cos(x)$ des Tangens liegt nun in $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, und wir können direkt die Umkehrfunktion arctan anwenden.

Ein **falscher** *Lösungsweg:* Wir wenden die Funktion arctan direkt auf beide Seiten der Gleichung an und erhalten

$$\arctan(a) = \arctan(\tan(\pi(1+\tfrac{1}{2}\cos(x)))) = \pi(1+\tfrac{1}{2}\cos(x)),$$

was offensichtlich nicht mit obigem Resultat übereinstimmt. Der Fehler liegt darin, dass im Allgemeinen *nicht* $\arctan(\tan z) = z$ gilt. Gleichheit besteht nämlich nur für $z \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, da der Wertebereich von arctan per Definition $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ist.

Fazit: Muss eine nicht injektive Funktion (wie hier der Tangens) erst auf einen kleineren Definitionsbereich eingeschränkt werden, damit sie umkehrbar ist, so ist bei der Anwendung der Umkehrfunktion Vorsicht geboten! Diese ist nur für die gewählte Einschränkung gültig.

8.a) Zunächst vergleichen wir x und x^2. Es gilt $x^2 \geq x$ für $x \geq 1$ (klar) und für $x \leq 0$ (da dort $x \leq 0 \leq x^2$). Folglich ist $\max(x, x^2) = x$ für $x \in [0,1]$ und sonst gleich x^2.
Nun vergleichen wir x und x^2 noch mit $(x+1)^3 - 1$. Diese kubische Funktion ist negativ genau dann wenn $(x+1)^3 < 1$, also wenn $x + 1 < \sqrt[3]{1} = 1$, d. h. genau dann wenn $x < 0$. Für $x < 0$ gilt also $(x+1)^3 - 1 < 0 < x^2$.
Für $x \geq 0$ müssen wir untersuchen, ob $(x+1)^3 - 1$ oder x kleiner ist. Es gilt

$$\begin{aligned} & (x+1)^3 - 1 && \gtreqless x \\ \iff\; & (x+1)^3 && \gtreqless x+1 \\ \iff\; & (x+1)^2 && \gtreqless 1 \\ \iff\; & (x+1) && \gtreqless 1 \\ \iff\; & x && \gtreqless 0, \end{aligned}$$

also $(x+1)^3 - 1 \geq x$ für $x \geq 0$. – Um $(x+1)^3 - 1$ mit x^2 zu vergleichen, beachten wir, dass $(x+1)^3 \geq (x+1)^2$ ist für $x+1 \geq 1$, d. h. für $x \geq 0$. Deshalb gilt

$$(x+1)^3 - 1 \geq (x+1)^2 - 1 = x^2 + 2x \geq x^2,$$

weil $x \geq 0$. — Folglich ist $(x+1)^3 - 1 \geq x$ und $\geq x^2$ für $x \geq 0$.
Insgesamt gilt folgendes: Für $x < 0$ ist $\max(x, x^2) = x^2$ und also

$$f(x) = \min((x+1)^3 - 1, \max(x, x^2)) = \min((x+1)^3 - 1, x^2) = (x+1)^3 - 1$$

nach dem obigen. Für $x \in [0,1]$ ist $\max(x, x^2) = x$, also

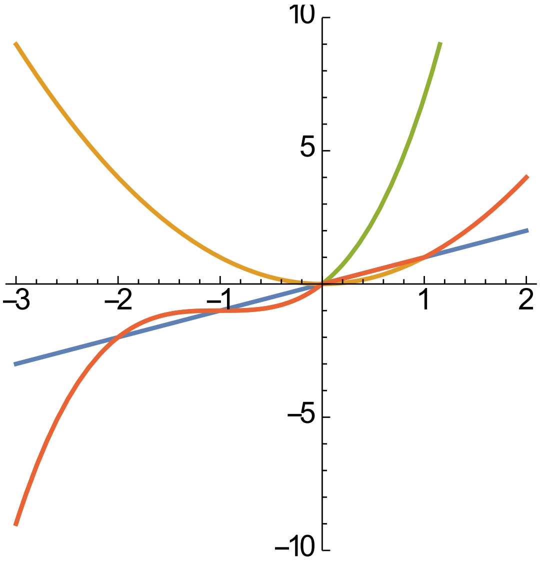
$$f(x) = \min((x+1)^3 - 1, \max(x, x^2)) = \min((x+1)^3 - 1, x) \overset{x \geqq 0}{=} x.$$

Für $x > 1$ ist wieder $\max(x, x^2) = x^2$, also

$$f(x) = \min((x+1)^3 - 1, \max(x, x^2)) = \min((x+1)^3 - 1, x^2) \overset{x \geqq 0}{=} x^2.$$

Schöner aufgeschrieben:

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^3 - 1, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2, & x > 1. \end{cases}$$



b) Für die Stetigkeit müssen wir nur bemerken, dass f an den Stellen, wo die Formel wechselt, stetig ist. Das ist klar, denn

$$(x+1)^3 - 1 \Big|_{x=0} = 0 = x \Big|_{x=0} \qquad \text{sowie} \qquad x \Big|_{x=1} = 1 = x^2 \Big|_{x=1} .$$

Wir zeigen nun, dass f strikt monoton steigend, also insbesondere injektiv, ist. Auf dem Intervall $(-\infty, 0]$ ist f strikt monoton steigend, da

$$\begin{aligned} & (x+1)^3 - 1 < (y+1)^3 - 1 \\ \iff \quad & (x+1)^3 < (y+1)^3 \\ \iff \quad & x+1 < y+1 \\ \iff \quad & x < y; \end{aligned}$$

wobei das Ziehen der dritten Wurzel das Vorzeichen erhält.
Auf den Intervall $[0,1]$ und $[1,\infty)$ ist f ebenso strikt monoton steigend, weil die Funktionen x und x^2 dies klarerweise erfüllen.
Nun ist aber einfach ersichtlich, dass eine stetige Funktion, die stückweise strikt monoton steigend ist, auch insgesamt strikt monoton steigend sein muss. Wenn wir beispielsweise zwei Punkte $x < y \in \mathbb{R}$ mit $x < 0$ und $y > 1$ nehmen, so gilt

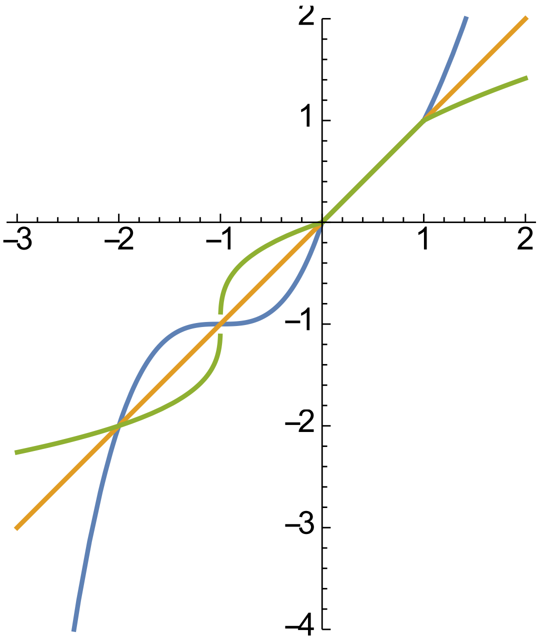
$$f(y) > f(1) > f(0) > f(x),$$

das erste wegen der Monotonie auf $[1,\infty)$, das zweite wegen der Monotonie auf $[0,1]$, und das dritte wegen der Monotonie auf $(-\infty, 0]$.

c) Da f injektiv ist, besitzt es eine Umkehrfunktion (bezüglich der Wertemenge W_f, die wir noch bestimmen müssen). Wir müssen also den Graphen von f an der Geraden $y = x$ spiegeln.
Betrachten wir zunächst den Teil für $x < 0$. Hier ist die Funktion gleich $f(x) = (x+1)^3 - 1$. Wir setzen $y = f(x)$ und lösen nach x auf, das ergibt $x = \sqrt[3]{y+1} - 1$. Da sich keine Einschränkung für y ergibt und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ gilt, nimmt also die Funktion für $x < 0$ alle y-Werte in $(-\infty, 0)$ an (Zwischenwertsatz). Es gilt also $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{x+1} - 1$ auf $y \in (-\infty, 0)$.
Nun folgt der Teil für $x \in [0,1]$. Hier ist die Funktion gleich $f(x) = x$, was sehr einfach zu invertieren ist. Das Bild sind alle y-Werte in $[0,1]$ und wir erhalten $f^{-1}(y) = y$ für $y \in [0,1]$.
Im letzten Teil, $x > 1$, ist $f(x) = x^2$. Auflösen von $y = f(x)$ nach x ergibt $x = \sqrt{y}$ für $y > 0$. Es gilt $f(1) = 1$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, also nimmt f auf $(0,\infty)$ alle Werte in $(1,\infty)$ an. Folglich ist $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ für $y \in (1,\infty)$.
Insgesamt erhalten wir die stückweise definierte Umkehrfunktion

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y+1} - 1, & y < 0 \\ y, & 0 \le y \le 1 \\ \sqrt{y}, & y > 1. \end{cases}$$

Diese Funktion ist wieder stetig und streng monoton wachsend. Zufälligerweise sind die Stellen, wo die Formel wechselt, gerade wieder die gleichen wie bei f.



9.a) Rechne

$$\tan(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \frac{\sin(\arcsin x)}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin x))^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Die zweite Gleichung folgt, weil $\arcsin x \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ für $x \in (-1,1)$, und damit $\cos(\arcsin x) > 0$. (Ansonsten müssten wir ein Minuszeichen vor die Wurzel setzen!)

b) Es gilt zunächst

$$x^2 = \tan^2(\arctan x) = \frac{\sin^2(\arctan x)}{\cos^2(\arctan x)} = \frac{1-\cos^2(\arctan x)}{\cos^2(\arctan x)}.$$

Somit ist

$$x^2 \cos^2(\arctan x) = 1 - \cos^2(\arctan x),$$

also $(x^2+1)\cos^2(\arctan x) = 1$ und die Identität folgt.
(Es gilt wiederum $\arctan x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ für $x \in \mathbb{R}$ und also $\cos(\arctan x) > 0$; deshalb ist die positive Wurzel richtig.)

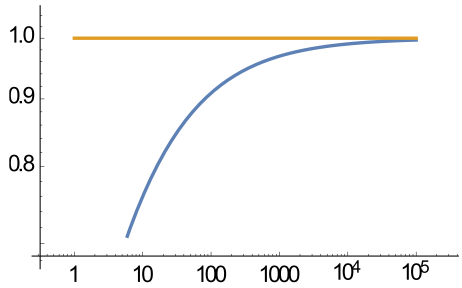
c) Sei $x \in [0,1]$ und setze $t := \arcsin x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Es gilt dann $\sin(t) = x$ und $\sin(t) = \cos(\frac{\pi}{2} - t)$. Einsetzen liefert

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \arcsin(\sin(t)) + \arccos(\cos(\tfrac{\pi}{2} - t)) = t + (\tfrac{\pi}{2} - t) = \tfrac{\pi}{2}.$$

Hier gilt die Gleichung $\arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - t)) = \frac{\pi}{2} - t$ nur, weil $\frac{\pi}{2} - t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ liegt.

10a)
$$\lim_{t\to\infty}\frac{t}{t+\sqrt{t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{t}}}=\frac{1}{1+0}=1.$$

Darum ist die Asymptote die konstante Funktion $h(t)=1$.



b) Polynomdivision ergibt
$$h(t)=\frac{t^5+3t^4+2t^3+t^2+8t+2}{t^3+1}=t^2+3t+2+\frac{5t}{t^3+1}.$$
Sei nun $k(t):=t^2+3t+2$. Dann ist
$$\lim_{t\to+\infty}(h(t)-k(t))=\lim_{t\to+\infty}\frac{5t}{t^3+1}=0$$
und somit ist k eine Asymptote.