

Schnellübung 1

1. Man untersuche die nachstehenden Zahlenfolgen. Sind sie beschränkt? Sind sie monoton? Konvergieren sie? Wenn ja: Welches ist ihr Grenzwert?

a) $a_n = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)$

b) $a_n = \frac{5n^3 - 1}{2n^3 + 6n - 7}$

c) $a_1 = 1, a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + 2}$ für $n = 2, 3, \dots$

d) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

e) $a_n = \sqrt{n(n+1)} - n$

2. Zeige für die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{c_0 + c_1 n + \dots + c_p n^p}{d_0 + d_1 n + \dots + d_q n^q},$$

wobei $c_p \neq 0, d_q \neq 0$, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} \frac{c_p}{d_q}, & \text{falls } p = q \\ 0, & \text{falls } p < q. \end{cases}$$

3. Berechne den Grenzwert der beiden unendlichen Zahlenfolgen

$$2, 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2\sqrt{2}}, 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots \quad \text{und} \quad 3, 3\sqrt[3]{3}, 3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}}, 3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}}}, \dots$$

4. Berechne ohne Taschenrechner die Summe aller zweistelligen natürlichen Zahlen, die durch drei geteilt den Rest zwei ergeben.