D-MAVT, D-MATL
Prof. Dr. Urs Lang

Analysis I
HS 15

Serie 10

1. Welches der folgenden Integrale stimmt im Allgemeinen nicht mit den anderen überein?

i) $\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$
ii) $\int_b^a (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$
iii) $\int_a^b (f(t) - g(t))\,\mathrm{d}t$
iv) $\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}u$

2. Es sei $f : [a, b] \to [c, d]$ eine stetig differenzierbare, streng monoton wachsende und surjektive Funktion mit Umkehrfunktion f^{-1}.

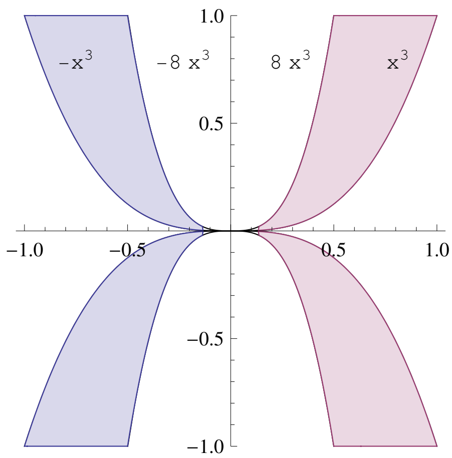
Dann gilt $\displaystyle\int_c^d f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y = \ldots$

i) $\displaystyle bd - ac - \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x.$
ii) $\displaystyle bd - ac - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$
iii) $\displaystyle \frac{1}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}.$
iv) $\displaystyle \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

3. Sei $f(x) := \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^3 + 2}}$. Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?

i) $f(1) > 0$
ii) $f(-1) > 0$
iii) $f(-\frac{1}{2}) < 0$
iv) $f(0) = 0$

4. Berechne die Fläche des unten dargestellten x-förmigen Bereichs.



i) 2

ii) $\frac{3}{2}$

iii) $\frac{3}{4}$

iv) 3

5. Eine geschlossene Kurve $[0,1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto (x(t), y(t))$ wird um den Faktor $a > 0$ gestreckt, das heisst, man erhält eine neue Kurve $[0,1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto (ax(t), ay(t))$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

i) Die Bogenlänge der neuen Kurve ist das a-te Vielfache der Bogenlänge der alten Kurve.

ii) Die Bogenlänge der neuen Kurve ist das a^2-te Vielfache der Bogenlänge der alten Kurve.

iii) Die Bogenlänge der neuen Kurve ist das $\sqrt{a}$-te Vielfache der Bogenlänge der alten Kurve.

iv) Die eingeschlossene Fläche der neuen Kurve ist das a-te Vielfache der eingeschlossenen Fläche der alten Kurve.

v) Die eingeschlossene Fläche der neuen Kurve ist das a^2-te Vielfache der eingeschlossenen Fläche der alten Kurve.

vi) Die eingeschlossene Fläche der neuen Kurve ist das $\sqrt{a}$-te Vielfache der eingeschlossenen Fläche der alten Kurve.

6. Berechne die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-x} \sin(nx)\, dx$, wobei $n \in \mathbb{N}_0$;

b) $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{x^4 + 3}$;

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$;

d) $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh x}\, dx$;

e) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\arcsin\left(\sqrt{1-4x^2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4} - x^2}}\, dx$;

f) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x} + x^2}$.

7. Berechne mittels Partialbruchzerlegung die folgenden unbestimmten Integrale:

a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^3 + x^2 - x - 1}\, \mathrm{d}x$;

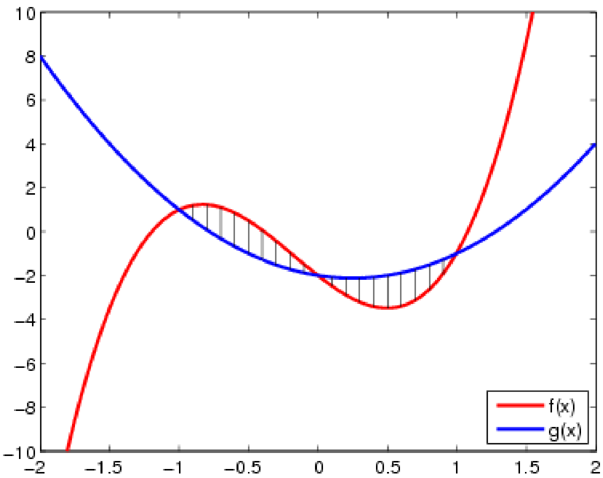
b) $\displaystyle\int \frac{2x^3 + 5x^2 + 4x + 1}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2}\,\mathrm{d}x$;

Hinweis: Das Polynom $x^2 + 1$ ist ein Faktor des Nenners.

c) $\displaystyle\int \frac{x + 2}{x^4 + 2x^2}\,\mathrm{d}x$.

8. Betrachte die Graphen der beiden Funktionen

$$f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 5x - 2 \qquad \text{und} \qquad g(x) = 2x^2 - x - 2.$$

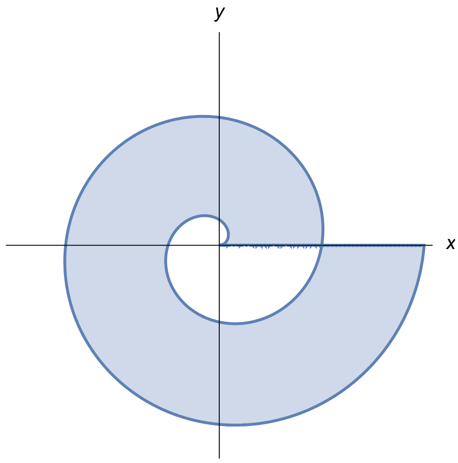


a) Bestimme die Stellen $x_1 < x_2 < x_3$, an denen sich die Graphen der beiden Funktionen schneiden.

b) Berechne das Integral $\displaystyle\int_{x_1}^{x_3} \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x$.

c) Berechne den Inhalt der schraffierten Fläche.

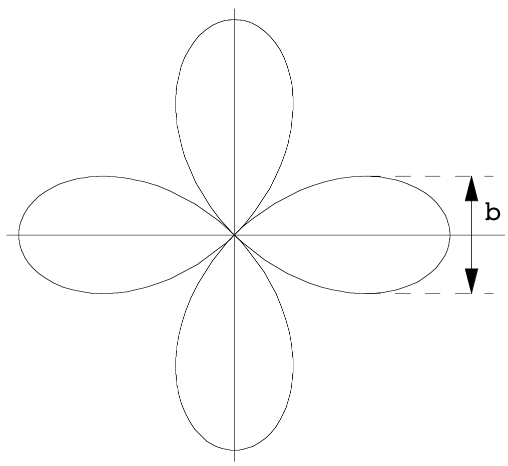
9. Es sei die Spirale $\varrho = \varphi$ in Polarkoordinaten gegeben. Man berechne den Inhalt des schattierten Flächenstückes, das eingeschlossen wird von der x-Achse und den Stücken der Kurve mit $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $\varphi \in [2\pi, 4\pi]$.



10. Prüfungsaufgabe Frühjahr 2005:
Durch

$$\varrho = a\,|\cos(2\varphi)|$$

mit $a > 0$ wird in Polarkoordinaten der Rand eines Kleeblattes parametrisiert.



a) Berechne den Flächeninhalt des Kleeblattes.

b) Bestimme die Breite b des Kleeblattes.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben am Mittwoch, 02. Dezember 2015 in den Schnellübungen. Die Multiple-Choice-Aufgaben sind online einzureichen.