Serie 5

1. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und seien $x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$ paarweise verschiedene Zahlen, so dass $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$ gilt. Welche Folgerung ist richtig?

- ☐ f' hat maximal zwei Nullstellen auf $[a, b]$.
- ☐ f' hat mindestens drei Nullstellen auf $[a, b]$.
- ☐ f' hat mindestens zwei Nullstellen auf $[a, b]$.
- ☐ f' hat genau zwei Nullstellen auf $[a, b]$.

2. Welche der folgenden Schlussfolgerungen über eine differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist **falsch**?

- ☐ Ist f streng monoton fallend, so ist $f' < 0$ auf (a, b).
- ☐ Ist $f' = 0$, so ist f konstant.
- ☐ Ist $f' > 0$ auf (a, b), so ist f streng monoton wachsend.
- ☐ Ist f monoton wachsend, so ist $f' \geq 0$.

3. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $a < c < b$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ☐ $f'(c) = 0 \Longrightarrow c$ ist eine Extremalstelle.
- ☐ $f'(c) = 0 \Longleftarrow c$ ist eine Extremalstelle.
- ☐ $f'(c) = 0 \Longleftrightarrow c$ ist eine Extremalstelle.
- ☐ Es gibt keinen Zusammenhang zwischen Extremalstellen und $f'(c)$.

4. Durch zweifache Anwendung der Regel von Bernoulli-de l'Hôpital folgt

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3} = \lim_{x \to 1} \frac{6x}{2} = 3.$$

Was stimmt an dieser Überlegung nicht? Die Regel von Bernoulli-de l'Hôpital ist...

- ☐ nicht anwendbar, weil die beiden ersten Brüche keine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion beschreiben.

- ☐ auf den zweiten Bruch nicht anwendbar, weil Zähler und Nenner für $x \to 1$ nicht beide gegen 0 oder ∞ streben.
- ☐ nicht anwendbar, weil das Zählerpolynom jeweils einen höheren Grad als das Nennerpolynom hat.
- ☐ auf den ersten Bruch nicht anwendbar, weil Zähler und Nenner für $x \to 1$ nicht beide gegen 0 oder ∞ streben.
- ☐ durchaus anwendbar und die Überlegung richtig!

5. Aus einem Kartonrechteck der Grösse $16 \times 21\texttt{cm}^2$ möchte man eine Schachtel ohne Deckel basteln, indem man an jeder Ecke ein Quadrat der Seitenlänge x ausschneidet und die Seiten nach innen faltet. Wie gross muss x sein, sodass das Volumen der Schachtel maximal ist?

- ☐ $\frac{28}{3}$
- ☐ 8
- ☐ 3
- ☐ $\frac{19}{6}$

6. Bestimme die folgenden Grenzwerte (Regel von Bernoulli-de l'Hôpital):

a) $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right),$$

b) $$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2},$$

c) $\lim_{x\to 0} \cot x \log(1+3x)$,

d) $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2},$$ wobei f zweimal stetig differenzierbar sei und x ein fester Punkt im Inneren des Definitionsbereichs von f.

7. Gegeben sei die Funktion $h:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

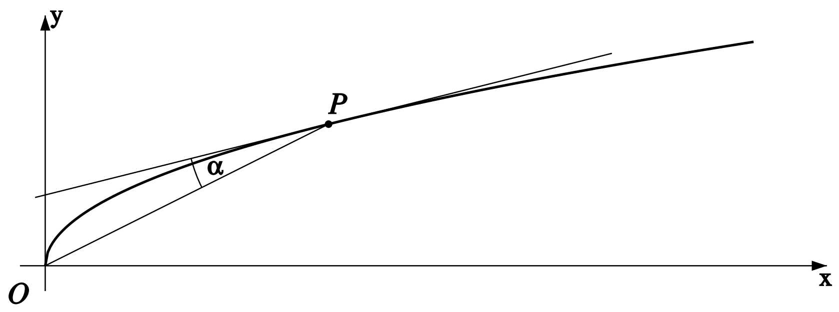
$$h(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

a) Ist h differenzierbar? Sollte dies der Fall sein, berechne h' und überprüfe, ob h' stetig ist.

b) Bestimme eine Asymptote von h für $x \to \pm\infty$.
Hinweis: Die Funktion $t \longmapsto t$ gibt eine gute Approximation der Sinus-Funktion $\sin t$ in einer Umgebung des Wertes $t = 0$. Gehe von dieser Tatsache aus, um eine mögliche Asymptote von h zu finden.

8. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $a < b$. Man bestimme das Maximum der Funktion $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ auf dem Intervall $[a, b]$, in Abhängigkeit der Lage von a und b.

9. Zwischen welchen Werten variiert α (= Winkel zwischen der Geraden OP und der Tangente in P), wenn P die Kurve $y = \sqrt{x}$ durchläuft?



10. Die durch eine punktförmige Lichtquelle verursachte Beleuchtungsstärke nimmt mit dem Quadrat des Abstandes zwischen Ausgangspunkt und Beobachtungspunkt ab.
Wo befindet sich der dunkelste Punkt auf der Verbindungsstrecke zwischen zwei zehn Meter voneinander entfernten, punktförmigen Lichtquellen, falls die eine achtmal so stark wie die andere ist?

Abgabe der schriftlichen Aufgaben am Mittwoch, 28. Oktober 2015 in der Vorlesung.
Die Multiple-Choice-Aufgaben sind online einzureichen.