Schnellübung 4

1. Eine Stunde nach einem Verkehrsunfall wird bei einem Fahrer eine Blutalkoholkonzentration von 1‰ festgestellt, eine weitere Stunde später 0.6‰. Wie hoch war die Blutalkoholkonzentration zum Zeitpunkt des Unfalls, wenn man wie üblich annimmt, dass die Geschwindigkeit der Konzentrationsabnahme direkt proportional zur Konzentration ist?

Lösung
Es sei $b(t)$ die Blutalkoholkonzentration nach t Stunden. Da nach Voraussetzung $b' = -K \cdot b$ ist (mit einer Konstanten $K > 0$), so wissen wir aus der Vorlesung, dass $b(t) = Ce^{-Kt}$ für $C \in \mathbb{R}$.

Beim Unfall (d. h. $t = 0$) ist $b(0) = C$.
Nach 1 h ($t = 1$) ist $b(1) = Ce^{-K} = 10^{-3}$ (nämlich 1‰).
Nach 2 h ($t = 2$) ist $b(2) = Ce^{-2K} = 0.6 \cdot 10^{-3}$ (d. h. 0.6‰).
Folglich ist die Konzentration zum Zeitpunkt des Unfalls gleich

$$b(0) = C = \frac{(Ce^{-K})^2}{Ce^{-2K}} = \frac{b(1)^2}{b(2)} = \frac{10^{-3} \cdot 10^{-3}}{0.6 \cdot 10^{-3}} = \frac{5}{3} \cdot 10^{-3} \approx 1.667‰.$$

2. Gegeben sei die *hyperbolische Spirale* durch die Darstellung in Polarkoordinaten:

$$\varrho = a/\varphi, \qquad a > 0 \text{ fest.}$$

Berechne die Steigung der Kurve in den Schnittpunkten mit der positiven x-Achse.

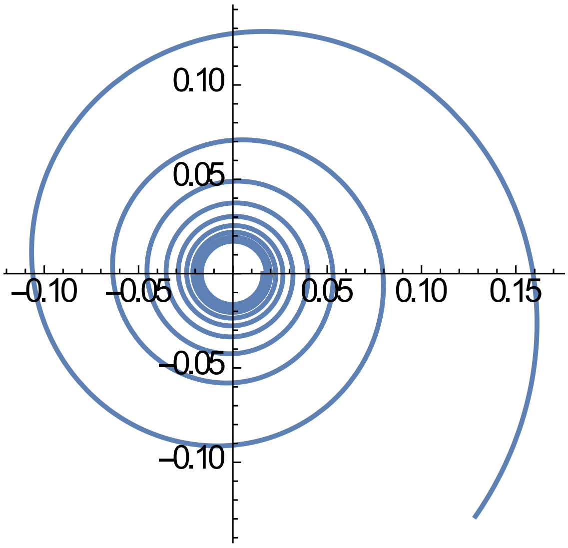
Lösung
Man hat die Parameterdarstellung $x(\varphi) = (a/\varphi)\cos\varphi,\ y(\varphi) = (a/\varphi)\sin\varphi$, und damit gilt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{(-a/\varphi^2)\sin\varphi + (a/\varphi)\cos\varphi}{(-a/\varphi^2)\cos\varphi - (a/\varphi)\sin\varphi} = \frac{\sin\varphi - \varphi\cos\varphi}{\cos\varphi + \varphi\sin\varphi}.$$

Wir setzen $y(\varphi) = 0$ mit $x(\varphi) > 0$, dann erhalten wir $\sin\varphi = 0$ mit $\cos\varphi > 0$, also $\varphi = 2\pi n$ mit $n \in \mathbb{N}$, dort gilt nämlich $\cos(2\pi n) = 1$. Wir setzen ein und erhalten

$$\frac{dy}{dx}(\varphi = 2\pi n) = -2\pi n.$$

Die Steigung nimmt also immer mehr zu und erscheint in der Skizze ($a = 1$) bald als vertikale Tangente.



3. Gegeben sei die Parabel $y = x^2$. In jedem Parabelpunkt P zeichne man die Orthogonale zur Verbindung $\overrightarrow{OP}$ nach aussen mit Länge l, was den Punkt Q ergibt. Gib eine Parameterdarstellung der Kurve K an, welche durch alle diese Punkte Q beschrieben wird.

Lösung
Sei $\vec{r}(x) = (x, y(x))$ ein Punkt auf der Parabel. Die Normale $\vec{n}$ zur Verbindung $\overrightarrow{OP}$ nach aussen ist $(y, -x)$ für $x > 0$ und $(-y, x)$ für $x < 0$. Dann ist K gegeben durch

$$\begin{aligned}
\vec{Q}(x) &= \vec{r}(x) + l \cdot \frac{\vec{n}(x)}{|n(x)|} \\
&= \begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix} + \frac{l}{\sqrt{x^2+x^4}} \begin{pmatrix} -x^2 \\ x \end{pmatrix}, & x < 0 \\ \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix} + \frac{l}{\sqrt{x^2+x^4}} \begin{pmatrix} x^2 \\ -x \end{pmatrix}, & x > 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix} + \frac{l}{-x\sqrt{1+x^2}} \begin{pmatrix} -x^2 \\ x \end{pmatrix}, & x < 0 \\ \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix} + \frac{l}{x\sqrt{1+x^2}} \begin{pmatrix} x^2 \\ -x \end{pmatrix}, & x > 0 \end{cases} \\
&= \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix} + \frac{l}{\sqrt{1+x^2}} \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad x \neq 0.
\end{aligned}$$

Beachte, dass im Nullpunkt die Normale zu $\overrightarrow{OP}$ nicht definiert ist; dort ist $\overrightarrow{OP}$ der Nullvektor.

4. Betrachte die ebene Kurve $y = e^x$, welche von links nach rechts durchlaufen wird.

a) In welchem Punkt der Kurve ist die Krümmung am grössten?

Lösung

Die Parameterdarstellung der Kurve lautet $\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (t, e^t)$. Es gilt $\dot{\vec{r}}(t) = (1, e^t)$ und $\ddot{\vec{r}}(t) = (0, e^t)$ und damit erhält man die Krümmung

$$k(t) = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{e^t}{(1 + e^{2t})^{3/2}}.$$

Deren Ableitung setzen wir Null:

$$k'(t) = \frac{e^t(1 - 2e^{2t})}{(1 + e^{2t})^{5/2}} \stackrel{!}{=} 0, \quad \text{also } t = \tfrac{1}{2}\log\tfrac{1}{2} = \log\tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

Da $\lim_{t\to\pm\infty} k(t) = 0$, wird die maximale Krümmung im Punkt $\vec{r}\left(\log\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\log\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ erreicht. Maximal deshalb, weil $k(t) > 0$ für $t \in \mathbb{R}$.

b) Gibt eine Parameterdarstellung ihrer Evolute an.

Lösung

Eine Parameterdarstellung der Evolute von $\vec{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, $t \in \mathbb{R}$, ist:

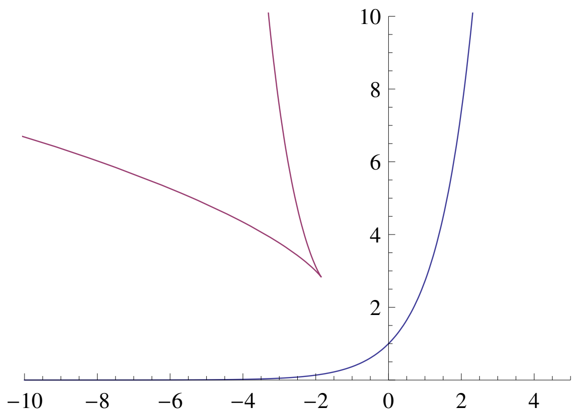
$$\vec{e}(t) = \vec{r}(t) + \frac{1}{k(t)}\vec{m}(t),$$

wobei $k(t) = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{e^t}{(1+e^{2t})^{3/2}}$ die Krümmung und

$$\vec{m}(t) = \frac{(-\dot{y}(t), \dot{x}(t))}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} = \frac{(-e^t, 1)}{\sqrt{1 + e^{2t}}}$$

der Normaleneinheitsvektor in Richtung der Krümmung der Kurve ist. Somit ist die Evolute gegeben durch

$$\vec{e}(t) = (t, e^t) + (e^{-t} + e^t) \cdot (-e^t, 1) = (t - e^{2t} - 1, e^{-t} + 2e^t).$$



Man sieht in der Grafik auch das Krümmungszentrum für den Punkt maximaler Krümmung, dort ist nämlich der Krümmungsradius minimal.