Serie 13

1. Der Wert einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fällt am schnellsten in die Richtung...

i) der minimalen partiellen Ableitung.

ii) entgegengesetzt zum Gradienten.

iii) entgegengesetzt zur maximalen partiellen Ableitung.

iv) orthogonal zum Gradienten.

v) des Gradienten.

2. Gegeben ist die Funktion $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = x^3y^2$. Man setze sich in den Punkt $(1, -1)$. Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?

i) Man stellt in Richtung von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Zunahme der Funktionswerte fest.

ii) Man stellt in y-Richtung eine Abnahme der Funktionswerte fest.

iii) Man stellt in Richtung von $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ eine Zunahme der Funktionswerte fest.

iv) Man stellt in x-Richtung eine Zunahme der Funktionswerte fest.

v) Man stellt in Richtung von $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Zunahme der Funktionswerte fest.

3. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und sei $c \in \mathbb{R}$. Definiere $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $g(x, y) := c \cdot f(x, y)$. Welche Aussagen sind richtig?

i) Falls (x_0, y_0) ein lokales Maximum von g ist, dann auch von f.

ii) Falls (x_0, y_0) ein lokales Extremum von g ist, dann auch von f.

iii) Falls (x_0, y_0) ein lokales Extremum von f ist, dann auch von g.

4. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

i) Jede globale Extremalstelle ist auch eine lokale Extremalstelle.

ii) Jede Stelle, an der die beiden partiellen Ableitungen f_x und f_y verschwinden, ist eine lokale Extremalstelle.

iii) Jede lokale Extremalstelle, an der die beiden partiellen Ableitungen f_x und f_y verschwinden, ist eine globale Extremalstelle.

iv) Es gibt immer nur eine globale Maximalstelle.

v) Jede lokale Extremalstelle ist auch eine globale Extremalstelle.

5. Sei $f : G \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, wobei $G \subset \mathbb{R}^2$ der Definitionsbereich von f ist. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

i) Hat f in (x_0, y_0) ein lokales Maximum bzw. Minimum, so gilt $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.

ii) Hat f in (x_0, y_0) ein lokales Maximum, so gilt $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ für alle $(x, y) \in G$ in der Nähe von (x_0, y_0).

iii) Gilt $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$, so hat f in (x_0, y_0) ein lokales Maximum oder Minimum.

6. a) Ein Berg sei beschrieben durch die Funktion

$$h(x, y) = 6000\, e^{-\frac{x^2}{1800} - \frac{y^2}{900}},$$

wobei die positive x-Achse nach Osten orientiert ist und die positive y-Achse nach Norden. In der Position $(7, 6, h(7, 6))$ steht ein Mann. Wie gross ist die Steigung (oder das Gefälle), wenn der Mann seinen Standort Richtung Nordosten bzw. Westen verlässt?

b) Ein Wanderer befindet sich irgendwo im Nebel – auf einem Berg, dessen Höhenfunktion wir nicht kennen. Er möchte schnellstmöglich ins Tal. Alles, was er weiss, ist, dass der Weg Richtung Osten 25% Steigung hat und Richtung Nordwesten 35% Gefälle. In welche Richtung muss er gehen und wie steil ist es da?

7. Wir untersuchen die Funktion

$$f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 4y.$$

a) Veranschauliche f mit Hilfe der Schnitte

$$S_{x=x_0}, \qquad x_0 \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

und

$$S_{y=y_0}, \qquad y_0 \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}.$$

(D.h., setze die Werte x_0 bzw. y_0 in die Funktion ein und zeichne die entstehende Kurve. Dieses Vorgehen heisst *Schnitt*, weil man wie mit einem Messer entlang der Ebene $x = x_0$ bzw. $y = y_0$ schneidet.)

b) Skizziere die Niveaulinien.

c) Skizziere den Graphen von f, d. h. die Fläche $z = f(x, y)$.

d) Bestimme einen Punkt (x_0, y_0), so dass die Tangentialebene an $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ parallel zur xy-Ebene liegt.

e) Wo durchstösst die Verlängerung der Flächennormalen durch $(1, 2, f(1, 2))$ die xy-Ebene?

8. Gegeben ist die Funktion

$$f : (x, y) \longmapsto \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

a) Bestimme den (aufgrund der gegebenen Formel grösstmöglichen) Definitionsbereich sowie den (zugehörigen) Wertebereich von f.

b) Diskutiere die Niveaulinien von f und zeichne sie für die Funktionswerte -1, -0.5, 0, 0.5 und 1 auf.

c) Berechne die lineare Ersatzfunktion von f im Punkt $(1, 1)$.

d) Die Grössen x und y seien in der Nähe von $(1, 1)$ und werden auf 1% genau gemessen. Schätze den relativen Fehler der Grösse $z = f(x, y)$ ab.

e) Berechne alle zweiten partiellen Ableitungen von f und überprüfe den Satz von Schwarz.

9. Bestimme die (globalen) Extrema der Funktion

$$f(x, y) = xy\,(2x - 5y)$$

auf dem abgeschlossenen Quadrat mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 2)$, $(2, 0)$.

10. Bestimme die (globalen) Extrema der Funktion

$$g(x, y) = 3y^2 - 1 - 2x^2$$

im Bereich

$$B = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\big\}.$$

Keine Abgabe der schriftlichen Aufgaben. Die Lösungen werden am 23. Dezember veröffentlicht. Die Multiple-Choice-Aufgaben sind online einzureichen.