Serie 2

1. Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto x^3 - x$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- ☐ Die Funktion f ist gerade.
- ☐ Die Funktion f ist ungerade.
- ☐ Die Funktion f ist weder gerade noch ungerade.

2. Die auf allen reellen Zahlen definierten Funktionen f und g seien ungerade. Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

- ☐ Die Funktion $f + g$ ist ungerade.
- ☐ Die Funktion $f - g$ ist ungerade.
- ☐ Die Funktion $f \cdot g$ ist ungerade.
- ☐ Die Funktion f/g ist gerade.

3. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & 0 < x \leq 1 \\ \frac{x}{x+1} & x > 1 \end{cases}.$$

Welche Aussagen gelten?

- ☐ f ist stetig.
- ☐ f ist stetig in 0.
- ☐ f ist stetig in 1.

4. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^4-1} & \text{für } x \neq 1, \\ a & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

Für welches a ist f stetig an der Stelle 1?

- ☐ $a = 4$
- ☐ Ein solches a gibt es nicht.
- ☐ $a = 1$

☐ $a = \frac{1}{4}$

☐ Für jedes a.

5. Es seien $a,\ b > 1,\ a \neq b$ reelle Zahlen. Dann unterscheiden sich die Funktionen $f_a:\ x \mapsto a^x$ und $f_b:\ x \mapsto b^x$

☐ um eine additive Konstante.

☐ um eine multiplikative Konstante.

☐ durch eine Stauchung oder Streckung in Richtung der x-Achse.

☐ nur durch das Vorzeichen.

6. Bestimme – soweit sie existieren – die Grenzwerte der folgenden Funktionen:

a)
$$x \mapsto \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}, \quad \text{für } x \to 1^+,\ x \to 1^-,\ x \to +\infty$$

b)
$$x \mapsto \frac{1}{x^2(1 + 2x)} \sin(x^2), \quad \text{für } x \to 0^+,\ x \to 0^-$$

c)
$$x \mapsto \frac{\sqrt{\sin^2 x}}{x}, \quad \text{für } x \to 0^+,\ x \to 0^-$$

7. Bestimme – sofern vorhanden – die folgenden Grenzwerte. Benutze dabei *nicht* die Regel von de l'Hôpital, auch wenn diese bekannt sein sollte!

a)
$$\lim_{x \to 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 + 2x}$$

b)
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x}$$

c)
$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$$

d)
$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} \right)$$

e)
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \tan x$$

8. Gegeben sei das Polynom

$$p_x(y) = y^3 + 4y^2 + xy \ .$$

Definiere eine Funktion f durch die Vorschrift

$$f : x \longmapsto \text{kleinste Nullstelle von } p_x(y) \ .$$

Beschreibe f durch eine Formel und skizziere den Graphen von f. Ist f stetig?

9. Wir nehmen an, dass die Funktion $T: \ [0,\ 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, die die Temperatur auf dem Erdäquator in einem gewissen Zeitpunkt angibt, stetig ist. Zeige, dass es zu diesem Zeitpunkt zwei antipodische Punkte auf dem Äquator gibt, wo die gleiche Temperatur herrscht.
Hinweis: Betrachte die Temperaturdifferenz antipodischer Punkte als eine Funktion und überlege, wie man den Zwischenwertsatz anwenden könnte.

10. Ausgehend von der Funktion f_0 zeichne man in *einer* Figur (Einheit = 2 cm) die Graphen der Funktionen f_0 bis f_5. Beschreibe auch in Worten, wie die Graphen von f_1 bis f_5 aus dem von f_0 hervorgehen.

$f_0 : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ $\qquad$ $f_1 : x \mapsto \frac{1}{9x^2+1}$

$f_2 : x \mapsto \frac{8}{x^2+4}$ $\qquad$ $f_3 : x \mapsto \frac{1}{x^2-2x+2}$

$f_4 : x \mapsto \frac{x^2}{x^2+1}$ $\qquad$ $f_5 : x \mapsto \frac{1}{4}(x^2+4)$

Abgabe der schriftlichen Aufgaben am Mittwoch, 7. Oktober 2015 in den Schnellübungen.
Die Multiple-Choice-Aufgaben sind online einzureichen.