D-MAVT, D-MATL
Prof. Dr. Urs Lang

Analysis I
HS 15

Schnellübung 5

1. a) Verwende die Identitäten $\cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos\varphi)$ und $\sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos\varphi)$, um die folgende explizite Formel für die Lösungen der Gleichung $z^2 = w = a+ib \in \mathbb{C}$ in Normalform herzuleiten:

$$z_{0,1} = \pm\left(\sqrt{\frac{|w|+a}{2}} + i\ \mathrm{sgn}(b)\sqrt{\frac{|w|-a}{2}}\right).$$

Dabei bezeichnet sgn die Vorzeichenfunktion, für $x \in \mathbb{R}$ ist sie gegeben durch

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{falls } x < 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \\ 1, & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

Bemerkung: Diese Lösungsformel findet sich auch im Buch *Formeln, Tabellen, Begriffe*, 5. Auflage 2015, S. 23.

Lösung

Zunächst sehen wir, dass die Lösungen offensichtlich korrekt sind für $w = 0$, wir können also im Folgenden annehmen, dass $|w| \neq 0$.

Wir ziehen die Wurzel zuerst, wie gewohnt, in Polarform und machen dazu den Ansatz $w = |w|e^{i\varphi}$. Die Lösungen der Gleichung $z^2 = |w|e^{i\varphi}$ lauten somit

$$z_k = \sqrt{|w|}\cdot e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+k\pi\right)}, \quad k = 0,1;$$

insbesondere also

$$z_{0,1} = \pm\sqrt{|w|}\cdot e^{i\frac{\varphi}{2}} = \pm\sqrt{|w|}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

mit der Eulerschen Formel.

Nun wenden wir die beiden gegebenen trigonometrischen Identitäten an, dabei müssen wir jedoch sehr vorsichtig mit den Vorzeichen sein! Setzen wir nämlich einfach $\cos\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\varphi)}$ und $\sin\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\varphi)}$, so würden sich insgesamt vier Lösungen ergeben, was aber dem Fundamentalsatz der Algebra widerspricht (eine quadratische Gleichung hat höchstens zwei verschiedene Lösungen). Um die richtigen Vorzeichen zu bestimmen, nehmen wir zunächst ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $\varphi \in (-\pi,\pi]$ und der Winkel $\varphi_0 = \frac{\varphi}{2}$ zur Lösung z_0 in $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ liegt. Dadurch gilt

$$\begin{aligned} &\cos\varphi_0 \geq 0, && \text{also } \cos\varphi_0 = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\cos\varphi)} \quad \text{und} \\ &\sin\varphi_0 = \mathrm{sgn}(\sin\varphi_0)\cdot|\sin\varphi_0|, && \text{also } \sin\varphi_0 = \mathrm{sgn}(\sin\varphi_0)\cdot\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\cos\varphi)}. \end{aligned}$$

Wegen $w = a+ib = |w|e^{i\varphi} = |w|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ mit $|w| \neq 0$ gilt $\cos\varphi = \frac{a}{|w|}$ und $\sin\varphi = \frac{b}{|w|}$. Insbesondere hat $\sin\varphi$ das gleiche Vorzeichen wie b, und damit gilt $\mathrm{sgn}(\sin\varphi_0) = \mathrm{sgn}(\sin\frac{\varphi}{2}) = \mathrm{sgn}(\sin\varphi) = \mathrm{sgn}(b)$.

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt{|w|}\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\varphi)} + i\ \mathrm{sgn}(\sin\varphi_0)\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\varphi)}\right) \\ &= \sqrt{|w|}\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{|w|}\right)} + i\ \mathrm{sgn}(b)\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{|w|}\right)}\right) \\ &= \left(\sqrt{\frac{|w|+a}{2}} + i\ \mathrm{sgn}(b)\sqrt{\frac{|w|-a}{2}}\right). \end{aligned}$$

Für die andere Lösung gilt $z_1 = -z_0$.

b) Berechne die komplexen Quadratwurzeln von $-3+4i$.

Lösung

In diesem Beispiel gilt $|w| = 5$, $a = -3$ und $\mathrm{sgn}(b) = 1$, einsetzen liefert also

$$z_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\frac{5-3}{2}} + i\sqrt{\frac{5+3}{2}}\right) = \pm(1+2i).$$

Beachte, dass diese Formel hier von grossem Nutzen ist, da das Rechnen in Polarform deutlich mühsamer ist (der Polarwinkel ist nicht einfach darstellbar).

2. Berechne die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int (t-x)\,dx,$

Lösung

$\displaystyle\int (t-x)\,dx = tx - \frac{x^2}{2} + C.$

b) $\displaystyle\int (t-x)\,dt,$

Lösung

$\displaystyle\int (t-x)\,dt = \frac{t^2}{2} - xt + C.$

c) $\displaystyle\int x\,e^{x^2}\,dx,$

Lösung

Wir nutzen $\frac{d}{dx}e^{x^2} = 2xe^{x^2}$ aus und erhalten

$$\int x\,e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\,e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

d) $\displaystyle\int x\,(1+x^2)^9\,dx,$

Lösung

Wir benutzen $\frac{d}{dx}(1+x^2)^{10} = 20x(1+x^2)^9$ und erhalten

$$\int x\,(1+x^2)^9\,dx = \frac{1}{20}(1+x^2)^{10} + C.$$

e) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x+1}\,dx,$

Lösung

Mit $x+2 = x+1+1$ folgt

$$\int \frac{x+2}{x+1}\,dx = \int \Big(1+\frac{1}{x+1}\Big)\,dx = x + \log(|x+1|) + C.$$

f) $\displaystyle\int \frac{1-x^5}{1-x}\,dx.$

Lösung

Da $x=1$ eine Nullstelle des Zählers ist, spalten wir diese zunächst ab (Polynomdivision) und erhalten

$$1-x^5 = (1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4).$$

Damit ergibt sich

$$\int \frac{1-x^5}{1-x}\,dx = \int (1+x+x^2+x^3+x^4)\,dx = \frac{1}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C.$$

3. Berechne mit partieller Integration:

a) $\displaystyle\int_0^\pi x^2 \sin x\,dx,$

Lösung

Wir integrieren zwei Mal partiell:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \underbrace{x^2}_{\downarrow}\underbrace{\sin x}_{\uparrow}\,dx &= \underbrace{\big[-x^2\cos x\big]_0^\pi}_{=\pi^2-0} + \int_0^\pi \underbrace{2x}_{\downarrow}\underbrace{\cos x}_{\uparrow}\,dx \\ &= \pi^2 + \underbrace{\big[2x\sin x\big]_0^\pi}_{=0-0} - \int_0^\pi 2\sin x\,dx \\ &= \pi^2 + \underbrace{\big[2\cos x\big]_0^\pi}_{=-2-2} = \pi^2 - 4.\end{aligned}$$

b) $\displaystyle\int x^2 \log x\,dx,$

Lösung

$$\begin{aligned}\int \underbrace{x^2}_{\uparrow}\underbrace{\log x}_{\downarrow}\,dx &= \frac{1}{3}x^3\log x - \frac{1}{3}\int x^3\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{3}x^3\log x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx \\ &= \frac{1}{3}x^3\log x - \frac{1}{9}x^3 + C.\end{aligned}$$

c) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x^2}\,dx.$

Lösung

$$\int \underbrace{\log x}_{\downarrow} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\uparrow}\,dx = -\frac{1}{x}\log x + \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx = -\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x} + C = -\frac{\log x + 1}{x} + C.$$

4. Es sei f eine auf der ganzen Zahlengeraden definierte und stetige Funktion. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$F\colon\ x \longmapsto \int_0^{\sin x} f(t)\,dt.$$

Lösung

Setze $G(x) := \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$. Dann gilt nach dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung $G'(x) = f(x)$. Die Funktion F ist definiert durch $F(x) = G(\sin x)$. Also gilt mit der Kettenregel

$$F'(x) = G'(\sin x)\cos x = f(\sin x)\cos x.$$