D-MAVT, D-MATL
Prof. Dr. Urs Lang

Analysis I
HS 15

Serie 9

1. Die Funktion $f(x) = x \cdot e^x + 7$ ist...

i) ✗ die Ableitung der Funktion $g_1(x) = \frac{1}{2}x^2 \cdot e^x + 7x$.

ii) ✗ eine Stammfunktion der Funktion $g_2(x) = e^x$.

iii) ✗ die Ableitung der Funktion $g_3(x) = e^x + 7x$.

iv) ✓ eine Stammfunktion der Funktion $g_4(x) = e^x + x \cdot e^x$.

v) ✗ Alle obigen Aussagen sind falsch.

Lösung
Es gilt $f'(x) = e^x + xe^x = g_4(x)$, somit ist die vierte Aussage richtig und die zweite Aussage falsch. Des Weiteren gilt $g_1'(x) = xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x + 7$ und $g_3'(x) = e^x + 7$, somit ist auch die erste und dritte Aussage falsch.

2. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion mit $f(x) = \displaystyle\int_3^x \sin(t)\,dt$. Wie lautet die Ableitung von f?

i) ✗ $f'(x) = \cos(x)$

ii) ✓ $f'(x) = \sin(x)$

iii) ✗ $f'(x) = \cos(x) - \cos(3)$

iv) ✗ $f'(x) = \sin(x) - \sin(3)$

v) ✗ f ist für $x = 3$ nicht differenzierbar, also ist die Ableitung nicht überall definiert.

Lösung
Sei g eine stetige Funktion und a eine Konstante. Der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung besagt, dass die Funktion G mit $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$ eine Stammfunktion von g ist. Es gilt also $G'(x) = g(x)$. Setze hier $g(t) = \sin t$ und $a = 3$, so ist $f = G$ und wir erhalten

$$f'(x) = G'(x) = g(x) = \sin x.$$

Alternative: Berechne das Integral direkt durch

$$\int_3^x \sin(t)\,dt = \Big[-\cos t\Big]_{t=3}^{t=x} = -\cos x + \cos 3.$$

Dann ist $f'(x) = (-\cos x + \cos 3)' = \sin x$.

Die letzte Antwort ist falsch: auch bei $x = 3$ gilt $f'(x) = \sin x$.

3. Seien F bzw. G Stammfunktionen von f bzw. $g\colon (a, b) \to \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

i) ✓ FG ist eine Stammfunktion von $fG + Fg$.

ii) ✓ Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann ist $F + c$ eine Stammfunktion von f.

iii) ✗ FG ist eine Stammfunktion von fg.

iv) ✓ $F + G$ ist eine Stammfunktion von $f + g$.

- **Lösung**
  Die erste Option ist richtig. Es gilt nämlich $(FG)' = fG + Fg$.
- **Lösung**
  Die zweite Option ist richtig. Dies folgt aus $(F + c)' = F' = f$.
- **Lösung**
  Die dritte Option ist falsch. Z.B. ist $F(x) = G(x) = x$ eine Stammfunktion von $f(x) = g(x) = 1$, aber $F(x)G(x) = x^2$ ist keine Stammfunktion von $f(x)g(x) = 1$.
- **Lösung**
  Die vierte Option ist richtig. Dies folgt aus $(F + G)' = F' + G' = f + g$.

4. Wir rechnen

$$\begin{aligned} f(x) = (x-1)^4 &= \int 4(x-1)^3\,dx = \int (4x^3 - 12x^2 + 12x - 4)\,dx \\ &= x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x = g(x) \end{aligned}$$

und erhalten durch Einsetzen $1 = f(0) = g(0) = 0$. Wo liegt der Fehler?

i) ✓ Die Integrationskonstante fehlt.

ii) ✗ Die binomische Formel wurde falsch angewendet.

iii) ✗ Es ist trotzdem richtig, weil man Konstanten vernachlässigen darf.

iv) ✗ Man darf nicht einsetzen.

v) ✗ Weder f noch g sind Lipschitz-stetig.

Lösung
Die erste Option ist richtig! Gleichungen für unbestimmte Integrale gelten immer nur bis auf eine Integrationskonstante; diese darf man nur unterschlagen, wenn auf beiden Seiten einer Gleichung ein unbestimmtes Integral stehen bleibt. Die falsche Rechnung illustiert, was andernfalls passieren kann...

Alle anderen Optionen sind falsch: die binomische Formel wurde korrekt angewendet, man darf Konstanten eben nicht vernachlässigen, in Funktionen einsetzen darf man immer (im Definitionsbereich) und Lipschitz-Stetigkeit wird nirgends verwendet (beide Funktionen sind ja sogar stetig differenzierbar, siehe Aufgabe 9).

5. Sei $f(x) = \int_\pi^x \cos(\cos t)\,dt$. Dann ist $(f^{-1})'(0)$ gegeben durch

i) ✗ $\frac{\pi}{2}$

ii) ✗ -1

iii) ✗ $\cos(\cos(x))$

iv) ✓ $\frac{1}{\cos(1)}$

v) ✗ $\frac{\pi}{\cos(1)}$

Lösung
Nach dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung (anwendbar, da $t \mapsto \cos(\cos t)$ stetig ist) ist f differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = \cos(\cos x)$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $|\cos x| \leq 1 < \frac{\pi}{2}$ und daher ist $\cos(\cos x) > 0$. Also ist f strikt monoton wachsend und deshalb injektiv auf $\mathbb{R}$ (damit existiert die inverse Funktion und ist eindeutig).
Offensichtlich ist $f(\pi) = 0$ und daher ist $\pi = f^{-1}(0)$. Die Formel für die Ableitung einer Umkehrfunktion liefert deshalb

$$\left(f^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(0)\right)} = \frac{1}{f'(\pi)} = \frac{1}{\cos(\cos\pi)} = \frac{1}{\cos(-1)} = \frac{1}{\cos(1)}.$$

6. Bestimme die folgenden Integrale:

a)

$$\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\,dx,$$

Lösung
Eine Polynomdivision liefert $(x^2+2x) : (x^2+2x+1) = 1$ mit Rest -1. Also ist

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+2x}{x^2+2x+1}\,dx &= \int 1\,dx + \int \frac{-1}{(x+1)^2}\,dx\\ &= x + D + \int -(x+1)^{-2}\,dx = x + D + (x+1)^{-1}\\ &= x + \frac{1}{x+1} + D = \frac{x^2+x+1}{x+1} + D = \frac{x^2}{x+1} + C,\end{aligned}$$

wobei $D \in \mathbb{R}$ und $C := 1 + D$.

b)

$$\int \tan^2 x\,dx,$$

Lösung
Wir erinnern uns daran, dass $\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$. Damit gilt

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x\,dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx\\ &= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int 1\,dx = \tan x - x + C.\end{aligned}$$

c)

$$\int \tanh^2 x\,dx,$$

Lösung
Wir wissen, dass $\tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$. Damit gilt

$$\int \tanh^2 x \, dx = \int dx - \int (1 - \tanh^2 x) \, dx = x - \tanh x + C.$$

d)

$$\int \frac{x \, dx}{\sin^2 x},$$

Lösung
Wir benutzen partielle Integration: wir leiten x ab und integrieren $\frac{1}{\sin^2 x}$. Es gilt zunächst $\cot' x = -1 - \cot^2 x$ und damit

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} \, dx = \int (1 + \cot^2 x) \, dx = -\cot x + C,$$

also

$$\int \frac{x}{\sin^2 x} \, dx = \int \underbrace{x}_{\downarrow} \cdot \overbrace{\frac{1}{\sin^2 x}}^{\uparrow} \, dx = x \cdot (-\cot x) - \int 1 \cdot (-\cot x) \, dx$$

$$= -x \cot x + \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = -x \cot x + \log|\sin x| + C.$$

Der Pfeil $\downarrow$ bzw. $\uparrow$ bedeutet dabei ableiten bzw. integrieren.
Im letzten Schritt haben wir die *logarithmische Ableitung* benutzt: Es gilt immer $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \log|f(x)|$ (sofern $f(x)$ nirgends Null ist).

e)

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2 \, dx}{(1 + x^2)^2}.$$

Lösung
Wir bemerken zuerst, dass

$$\frac{d}{dx}(1 + x^2)^{-1} = -(1 + x^2)^{-2} \cdot 2x, \text{ also } \int \frac{2x}{(1 + x^2)^2} \, dx = -(1 + x^2)^{-1} + C.$$

Eine geschickte partielle Integration liefert dann

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2 \, dx}{(1 + x^2)^2} = \int_{-1}^{1} \underbrace{\frac{x}{2}}_{\downarrow} \cdot \overbrace{\frac{2x}{(1 + x^2)^2}}^{\uparrow} \, dx = \left[\frac{x}{2} \cdot \frac{-1}{1 + x^2}\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1 + x^2}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} [\arctan x]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Dabei haben wir benutzt, dass $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$ und $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

7. In dieser Aufgabe wollen wir das Integral der Funktion $f(x) = e^x$ im Intervall $[0, 1]$ mit Hilfe der Riemannschen Summe berechnen.

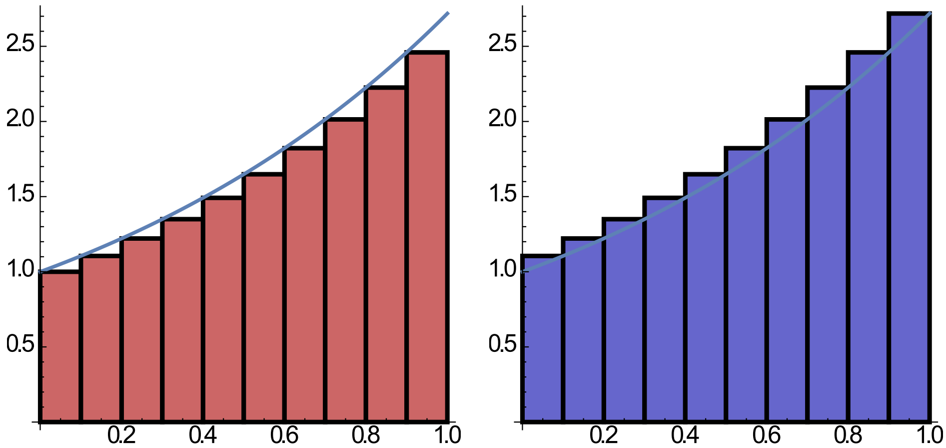
a) Berechne die n-te Untersumme U_n von f in $[0, 1]$.
(Benutze eine Unterteilung in gleich breite Intervalle.)
Lösung
Wir unterteilen das Intervall $[0, 1]$ in die n Teilintervalle

$$\left[k \cdot \frac{1}{n}, (k+1) \cdot \frac{1}{n}\right], \text{ für } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Die Breite eines jeden Teilintervalls ist $\frac{1}{n}$. Da die Funktion e^x monoton wachsend ist, nimmt sie auf jedem (abgeschlossenen) Intervall ihr Minimum auf dem linken Randpunkt an. Folglich ist die Höhe des Balkens für die Untersumme beim k-ten Teilintervall gleich $e^{k/n}$. Daher ist die Untersumme gegeben durch die Summe der Fläche der Balken:

$$U_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot e^{k/n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{1/n}\right)^k = \frac{1}{n} \cdot \frac{1 - \left(e^{1/n}\right)^n}{1 - e^{1/n}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1-e}{1-e^{1/n}}.$$

Im zweiten Schritt haben wir die Formel für die geometrische Reihe benutzt.



b) Berechne die n-te Obersumme O_n von f in $[0, 1]$.
Lösung
Analog wie bei **a)** schliessen wir, dass das Maximum der Funktion e^x auf dem k-ten Teilintervall sich beim rechten Randpunkt befindet, also gleich $e^{(k+1)/n}$ ist. Die Obersumme ist damit

$$O_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot e^{(k+1)/n} = \frac{1}{n} e^{1/n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{1/n}\right)^k = \frac{e^{1/n}}{n} \cdot \frac{1-e}{1-e^{1/n}}.$$

c) Zeige, dass $|O_n - U_n| \xrightarrow{n \to \infty} 0$.
(Das bedeutet, dass die Funktion e^x auf $[0, 1]$ Riemann-integrierbar ist.)

Lösung
Es gilt

$$\begin{aligned}|O_n - U_n| &= \left| \frac{e^{1/n}}{n} \frac{1-e}{1-e^{1/n}} - \frac{1}{n} \cdot \frac{1-e}{1-e^{1/n}} \right| = \frac{1}{n} \cdot \frac{1-e}{1-e^{1/n}} \cdot (e^{1/n} - 1) \\ &= \frac{e-1}{n},\end{aligned}$$

und das konvergiert nach 0 für $n \to \infty$.

d) Berechne $\displaystyle\int_0^1 e^x \, dx$ auf drei Arten.

Lösung
Nach dem Satz in der Vorlesung gilt nun $\int_0^1 e^x \, dx = \lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} U_n$. Wir benutzen zuerst die Untersumme und erhalten mit Bernoulli-Hôpital

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} U_n &= \lim_{n\to\infty} (1-e) \cdot \frac{1/n}{1-e^{1/n}} = (1-e) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{-1/n^2}{-e^{1/n} \cdot (-1/n^2)} \\ &= (1-e) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{-e^{1/n}} = e - 1.\end{aligned}$$

Der Grenzwert mit der Obersumme ergibt wegen **c)** dasselbe: $\lim_{n\to\infty} O_n = e - 1$. Mit dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung ergibt sich als dritte Variante

$$\int_0^1 e^x \, dx = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1,$$

da das unbestimmte Integral von $f(x) = e^x$ wieder f ist.

8. Die Funktion $f(x) := \sqrt{x}$ soll im Intervall $[0,1]$ derart durch eine lineare Funktion $\tilde{f}(x) := x + c$ approximiert werden, dass das Integral

$$\int_0^1 \left(f(x) - \tilde{f}(x)\right)^2 \, dx$$

minimal wird (es heisst *quadratisches Fehlerintegral*). Bestimme c, $\tilde{f}$ und den Fehler.

Lösung
Das Integral berechnet sich zu

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(f(x) - \tilde{f}(x)\right)^2 \, dx &= \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x - c\right)^2 \, dx \\ &= \int_0^1 \left(x - 2x^{3/2} - 2cx^{1/2} + x^2 + 2cx + c^2\right) \, dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{4}{5}x^{5/2} - \frac{4}{3}cx^{3/2} + \frac{x^3}{3} + cx^2 + c^2 x\right]_{x=0}^{x=1} \\ &= c^2 - \frac{1}{3}c + \frac{1}{30}.\end{aligned}$$

Also müssen wir die Funktion $h(c) = c^2 - \frac{1}{3}c + \frac{1}{30}$ minimieren. Deren Ableitung ist $h'(c) = 2c - \frac{1}{3}$, und diese ist Null, wenn $c = \frac{1}{6}$. An dieser Stelle findet man tatsächlich ein Minimum der Funktion h, denn $h'' = 2 > 0$.

Insgesamt ist also $\tilde{f}(x) = x + \frac{1}{6}$ die beste lineare Approximation der Funktion $\sqrt{x}$ auf dem Intervall $[0, 1]$ im *quadratischen Mittel*, und der Fehler ist $h(\frac{1}{6}) = \frac{1}{180}$.

9. a) Es sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Zeige, dass f Lipschitz-stetig ist (d. h., es gibt eine Konstante $L \geq 0$ mit $|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$ für alle $x, y \in [a, b]$).
Hinweis: Benutze den Mittelwertsatz der Differentialrechnung oder den Hauptsatz der Infinitesimalrechnung.

- **Lösung**
  Variante *Mittelwertsatz der Differentialrechnung*: Es seien $x, y \in [a, b]$ gewählt. Mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung finden wir ein $\xi \in [x, y]$ mit

  $$f'(\xi) \cdot (y - x) = f(y) - f(x).$$

  Damit gilt

  $$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y|.$$

  Nun ist die Ableitung $f'\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion nach Voraussetzung, also besitzt sie ein Maximum auf $[a, b]$, wir nennen es $L := \max_{t\in[a,b]} |f'(t)|$. Für unser ξ von oben gilt offensichtlich $|f'(\xi)| \leq L$, also

  $$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y| \leq L|x - y|.$$

- **Lösung**
  Variante *Hauptsatz der Infinitesimalrechnung*: Es seien $x, y \in [a, b]$ gewählt. Mit dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung ergibt sich

  $$|f(y) - f(x)| = \left| \int_x^y f'(t)\, dt \right| \leq \int_x^y |f'(t)|\, dt.$$

  Wie oben nennen wir $L := \max_{t\in[a,b]} |f'(t)|$ das Maximum der Ableitung von f auf $[a, b]$, damit erhalten wir

  $$|f(x) - f(y)| \leq \int_x^y |f'(t)|\, dt \leq \int_x^y L\, dt = L|y - x|.$$

b) Zeige, dass die Wurzelfunktion $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$, $f(x) := \sqrt{x}$ nicht Lipschitz-stetig ist.

Lösung
Wir nehmen zwei Punkte $x < y \in [0, 1]$ und berechnen

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| = \left| \frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{y - x} \right| = \left| \frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{y - x} \cdot \frac{\sqrt{y} + \sqrt{x}}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} \right|$$
$$= \left| \frac{y - x}{y - x} \cdot \frac{1}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} \right| = \frac{1}{\sqrt{y} + \sqrt{x}}.$$

Wir setzen nun $x := 0$, dann gilt

$$\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| = \left|\frac{f(y)-f(0)}{y-0}\right| = \frac{1}{\sqrt{y}}.$$

Dieser Ausdruck ist für $y \in [0,1]$ nicht beschränkt, da er für $y \to 0^+$ nach ∞ divergiert. Es gibt deshalb kein $L > 0$ mit $\frac{1}{\sqrt{y}} \leq L$ für alle $y \in [0,1]$ – also kann die Abschätzung $|f(y)-f(x)| \leq L|y-x|$ nicht mit einem festen L erfüllt sein. Die Funktion f ist also (bei $x = 0$) nicht Lipschitz-stetig.

Bemerkung: Die Ableitung von f gibt uns Hinweise über die Lipschitz-Konstante, wie wir in **a)** gezeigt haben. Hier haben wir $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, was in $x = 0$ nicht definiert ist. Im Allgemeinen gilt der Satz von Rademacher: Ist eine Funktion Lipschitz-stetig, so ist sie fast überall differenzierbar.

c) Finde die beste (d. h. die kleinste) Lipschitz-Konstante für die Funktion $f\colon [0,1] \to [0,1]$, $f(x) := x^2$.

Lösung
Es gilt $f'(x) = 2x$, was auf $[0,1]$ das Maximum $f'(1) = 2$ annimmt. Wir tippen also auf $L = 2$. Dies stimmt auch, denn für zwei Punkte $x < y \in [0,1]$ gilt

$$\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| = \left|\frac{y^2-x^2}{y-x}\right| = |y+x| = x+y,$$

was offensichtlich den Maximalwert 2 annimmt, wenn x und y beide nach 1 streben.

10. Die Abbildung

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad f(z) := 1/\overline{z}$$

heisst *Inversion am Einheitskreis.*

a) Zeige: Es gilt $f \circ f = id$ (d. h. f ist eine *Involution*), $\arg f(z) = \arg z$ und $|w| = |z| \Rightarrow |f(w)| = |f(z)|$, $\forall w, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Lösung
Für $0 \neq z = x + iy \in \mathbb{C}$ gilt

$$f(z) = 1/\overline{z} = \frac{1}{x-iy} = \frac{1}{x-iy} \cdot \frac{x+iy}{x+iy} = \frac{x+iy}{x^2+y^2}.$$

Daraus ergibt sich

$$f(f(z)) = 1/\overline{f(z)} = \frac{x^2+y^2}{x-iy} = \frac{x^2+y^2}{x-iy} \cdot \frac{x+iy}{x+iy} = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} \cdot (x+iy) = x+iy = z,$$

also $f \circ f = id$ und damit ist f eine Involution.
Alternativ kann man das auch in Polarform rechnen, dazu sei $z = re^{i\varphi}$ mit $r \neq 0$ und es gilt

$$f(z) = 1/\overline{z} = \frac{1}{re^{-i\varphi}} = \frac{1}{r}e^{i\varphi} \qquad (1)$$

und damit

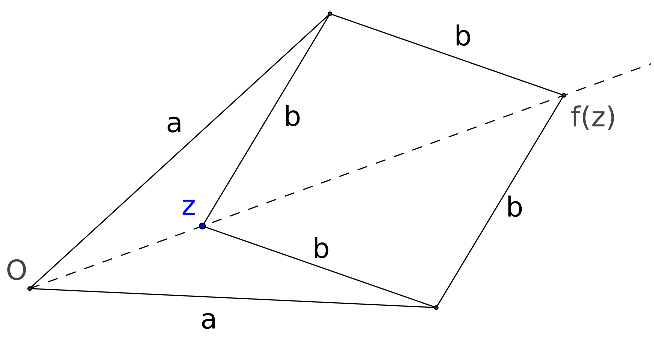
$$f(f(z)) = 1/\overline{f(z)} = r\frac{1}{e^{-i\varphi}} = re^{i\varphi} = z.$$

Hier kann man auch direkt aus Gleichung (1) ablesen, dass stets $\arg f(z) = \arg z$ gilt, denn die Winkel von z und $f(z)$ stimmen überein.
Weiter sehen wir aus (1), dass $|f(z)| = \frac{1}{|z|}$; insbesondere folgt also aus $|w| = |z|$, dass $|f(w)| = |f(z)|$.
Noch schneller geht es, wenn man die Identität $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ benutzt:

$$\frac{1}{\overline{z}} = \frac{z}{z \cdot \overline{z}} = \frac{z}{|z|^2},$$

daraus folgt sofort $\arg(1/\overline{z}) = \arg(z)$.

b) Zeige, dass der abgebildete Mechanismus die Abbildung f realisiert (auf einer Teilmenge von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$), sofern die Längen a und b die Beziehung $a^2 = b^2 + 1$ erfüllen.

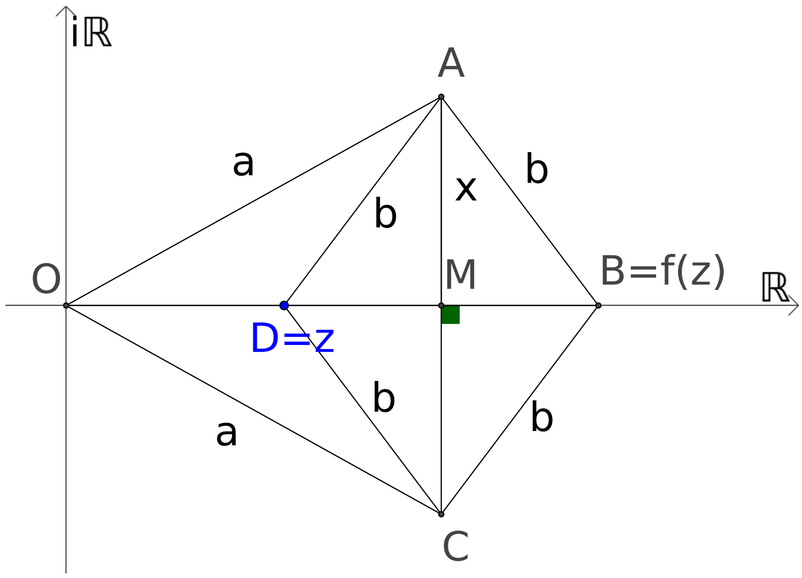


Hierbei sind die durchgezogenen Strecken bewegliche, mit Gelenken verbundene Stäbe; die gestrichelte Linie ist nur eine Hilfslinie; der Punkt O ist der Ursprung des Koordinatensystems.
Hinweis: Betrachte zuerst nur den Fall $z \in \mathbb{R}$ und benutze Elementargeometrie.

Lösung

Aus der Geometrie der Drachenvierecke (Deltoiden) folgt, dass die Punkte O, D und B auf einer Geraden liegen (diese Gerade geht durch die Diagonalen der beiden Drachenvierecke).

Es sei zunächst z auf der positiven reellen Achse gewählt, und der Mechanismus sei entsprechend ausgerichtet. In diesem Fall ist $f(z) = 1/\overline{z} = \frac{1}{z}$, da $\mathrm{Im}(z) = 0$.



Die Punkte O, A, B, C, D seien wie in der Zeichnung die Ecken des kleinen bzw. grossen Drachenvierecks, so dass $D = z$. Wir müssen zeigen, dass der Mechanismus den Punkt B auf $\frac{1}{z} \in \mathbb{R}$ abbildet.

Es sei M der Mittelpunkt von $\overline{AC}$, dann ist M auch der Mittelpunkt von $\overline{BD}$, da $ABCD$ ein Rhombus ist. Da $ABCD$ und $OABC$ Drachenvierecke sind, stehen die Strecken OB und AC (nämlich die Diagonalen dieser Vierecke) senkrecht aufeinander.

Es sei nun $x := |\overline{AM}|$ die Länge der Strecke $\overline{AM}$. Wir benutzen den Satz des Pythagoras für die beiden Dreiecke OMA und DMA, die beide bei M einen rechten Winkel haben. Wir erhalten $x^2 = a^2 - |\overline{OM}|^2$ und $x^2 = b^2 - |\overline{DM}|^2$. Wir schreiben $z = |\overline{OD}|$ und $s := |\overline{OB}|$. Da M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BD}$ ist, gilt $|\overline{DM}| = \frac{1}{2}(s - z)$ sowie $|\overline{OM}| = \frac{1}{2}(s + z)$. Damit folgt

$$x^2 = b^2 - |\overline{DM}|^2 = b^2 - \frac{1}{4}(s - z)^2;$$
$$x^2 = a^2 - |\overline{OM}|^2 = a^2 - \frac{1}{4}(s + z)^2.$$

Gleichsetzen ergibt

$$\begin{aligned} & 4b^2 - (s - z)^2 = 4x^2 = 4a^2 - (s + z)^2 \\ \Longleftrightarrow \quad & 4b^2 - z^2 + 2sz - s^2 = 4a^2 - s^2 - 2sz - z^2 \\ \Longleftrightarrow \quad & 4sz = 4(a^2 - b^2) \\ \Longleftrightarrow \quad & sz = a^2 - b^2; \end{aligned}$$

und ist nun $a^2 = b^2 + 1$ gemäss Voraussetzung, so folgt $s \cdot z = 1$; also $s = \frac{1}{z}$. Damit hat also $\overline{OB}$ die Länge $\frac{1}{z} = f(z)$; und da B auf der reellen Achse liegt, muss $B = f(z)$ sein.

Nun sei $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ eine Zahl auf der komplexen Zahlenebene in der Polarform (mit $r > 0$). Der Punkt D im Mechanismus ist um O rotierbar, ohne den Abstand $|\overline{OB}|$ zu verändern; und die Punkte O, D, B liegen stets auf einer Geraden. Also drehen wir D (d. h. z) zuerst auf die (positive) reelle Achse, indem wir mit $w := e^{-i\varphi}$ multiplizieren. Dort gilt $D = wz = r \in \mathbb{R}$ und damit $B = \frac{1}{wz} = f(wz)$, da $wz = r$ reell ist. Nun drehen wir das Resultat $\frac{1}{wz}$ wieder auf zurück mit Multiplikation von $\frac{1}{w} = e^{i\varphi}$, das ergibt dann $\frac{1}{w^2 z} = \frac{1}{r} e^{i\varphi}$.
Das entspricht aber genau

$$f(z) = 1/\overline{z} = \left(\overline{re^{i\varphi}}\right)^{-1} = \left(re^{-i\varphi}\right)^{-1} = \frac{1}{r} e^{i\varphi}.$$

c) Es sei $\frac{a-b}{2} < r < \frac{1}{2}$ gegeben. Zeige: Bewegt sich $z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ auf dem Kreis $|z-r| = r$, so bleibt $f(z)$ auf der Geraden $\operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{2r}$.
Hinweis: Berechne $z\overline{z}$ mittels $(z-r)(\overline{z}-r) = |z-r|^2 = r^2$ und setze in $f(z) = \frac{z}{z\overline{z}}$ ein.
Weitere Informationen und eine Animation des Mechanimus' sind unter `https://de.wikipedia.org/wiki/Inversor_von_Peaucellier` zu finden.
Lösung
Da sich z auf dem gegebenen Kreis bewegt, folgt

$$r^2 = |z-r|^2 = (z-r)(\overline{z-r}) = (z-r)(\overline{z}-r) = z\overline{z} - r(z+\overline{z}) + r^2.$$

Da $\operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}$, erhalten wir aus dieser Gleichung $z\overline{z} = 2r \cdot \operatorname{Re} z$. Dies können wir nun verwenden, um den Bildpunkt von z unter f zu berechnen:

$$f(z) = 1/\overline{z} = \frac{z}{z\overline{z}} = \frac{z}{2r \cdot \operatorname{Re} z}.$$

Daraus ergibt sich

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{2r \cdot \operatorname{Re} z} = \frac{1}{2r},$$

womit der Realteil des Bildes von z unter f konstant ist, solange sich z auf dem Kreis bewegt. Also bewegt sich $f(z)$ auf einer Geraden.

Der Mechanismus – genannt *Inversor von Peaucellier* – kann also eine Kreisbewegung in eine Geradenbewegung umsetzen (und umgekehrt).

Abgabe der schriftlichen Aufgaben am Mittwoch, 25. November 2015 in der Vorlesung. Die Multiple-Choice-Aufgaben sind online einzureichen.