Serie 6

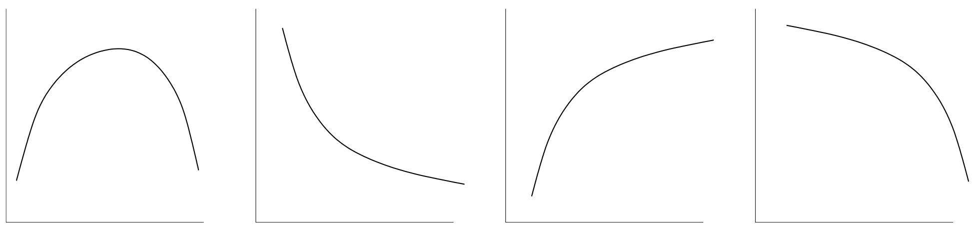
1. Welche der folgenden Funktionen ist nicht gleich den anderen?

- ☐ $\operatorname{artanh} y$
- ☐ $\frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y}$
- ☐ $\log \sqrt{1+y} - \log \sqrt{1-y}$
- ☐ $\frac{\operatorname{arsinh} y}{\operatorname{arcosh} y}$

2. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt...

- ☐ $e^{-1/x} = o(x^n)$ für $x \to 0^+$
- ☐ $e^{1/x} = o(x^{-n})$ für $x \to 0^+$
- ☐ $x^{-n} = o(e^{1/x})$ für $x \to 0^+$

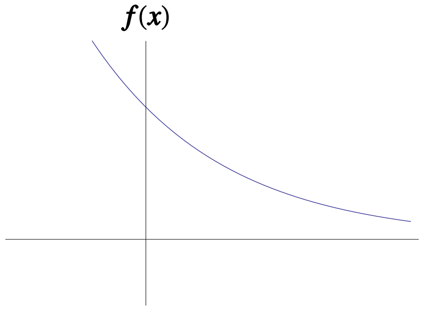
3. Sei f eine Funktion mit $f'' < 0$. Welche der folgenden Kurven könnten den Graphen G_f von f beschreiben?



I **II** **III** **IV**

- ☐ I
- ☐ II
- ☐ III
- ☐ IV
- ☐ Gar keine.

4. Die Figur zeigt den Graphen einer zweimal differenzierbaren Funktion f. Was lässt sich über f, f' und f'' im gezeichneten Intervall sagen?



- ☐ Die Funktion f ist positiv.
- ☐ Die Funktion f ist negativ.
- ☐ Die erste Ableitung f' ist positiv.
- ☐ Die erste Ableitung f' ist negativ.
- ☐ Die zweite Ableitung f'' ist positiv.
- ☐ Die zweite Ableitung f'' ist negativ.
- ☐ Nichts!

5. Beschreibe die Bewegung eines Punktes mit der Parametrisierung

$$\left[0, \tfrac{\pi}{3}\right] \to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -\sin 6t \\ \cos 6t \end{pmatrix}.$$

- ☐ Kreisbahn mit Mittelpunkt $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ und Radius 2, zweimaliger Umlauf im Uhrzeigersinn beginnend bei $(0, 1)$.
- ☐ Ellipse mit Mittelpunkt $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, vom Punkt $(0, 1)$ nach $(1, 0)$.
- ☐ Kreisbahn mit Mittelpunkt $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ und Radius 2, einmaliger Umlauf im Uhrzeigersinn beginnend bei $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2)$.
- ☐ Kreisbahn mit Mittelpunkt $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ und Radius 2, zweimaliger Umlauf gegen den Uhrzeigersinn.
- ☐ Kreisbahn mit Mittelpunkt $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ und Radius 2, einmaliger Umlauf gegen den Uhrzeigersinn beginnend bei $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2)$.

6. a) Zeige, dass $(\cosh x + \sinh x)^{-1} = \cosh x - \sinh x$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Zeige, dass $2\cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cosh x + 1$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$.

c) Zeige, dass die Funktion $\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strikt konvex ist.

d) Auf welcher Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist die Funktion $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konkav?

e) Auf welcher Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist die Funktion $\tanh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex?

7. Man ordne die folgenden Funktionen nach der Stärke, mit der sie für $x \to \infty$ nach ∞ streben.

$$\log\left(\log(x^2)\right), \qquad \log(e^x - x), \qquad x^2, \qquad x^{\frac{1}{5}}, \qquad \log(10\sqrt{x}), \qquad e^{3x}.$$

8. Gegeben sei die Funktion $f\colon x \longmapsto x\sqrt{4-x^2}$.

a) Bestimme den Definitionsbereich und Nullstellen von f.

b) Wo ist f monoton wachsend bzw. monoton fallend? Bestimme die lokalen Extrema von f (falls vorhanden), und unterscheide Minima und Maxima. Besitzt f globale Extrema?

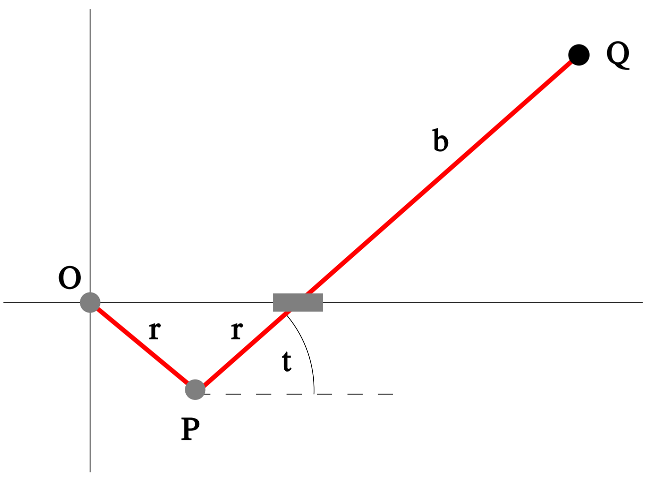
c) Bestimme den Wertebereich von f.

d) Wo ist f konvex? Konkav? Bestimme eventuelle Wendepunkte von f.

e) Mit der oben bestimmten Information skizziere man den Graphen von f.

9. In der x-y-Ebene sei am Nullpunkt ein in der Ebene drehbarer Stab der Länge $r > 0$ befestigt, dessen Endpunkt P mit einem weiteren Stab PQ der Länge $r + b$, $b > 0$, beweglich verbunden sei. Eine Führung sorge dafür, dass der Punkt des Stabes PQ, der sich im Abstand r von P befindet, nur der positiven x-Achse entlang gleiten kann.

Man bestimme eine Parametrisierung der Menge K aller möglicher Positionen von Q in Abhängigkeit des Steigungswinkels $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ von PQ. Um was für eine Kurve K handelt es sich?



10. Ein Kreis vom Radius r rollt im Innern eines Kreises vom Radius R ab. Die Kurve $\vec{r}(t)$, die dabei ein fester Punkt P auf dem Rand des kleinen Kreises beschreibt, heisst *Hypozykloide*.

a) Bestimme $\vec{r}(t)$ allgemein (im Fall $r \leq R$).

b) Was ergibt sich im Spezialfall $R = 4r$?

c) Was ergibt sich im Spezialfall $R = 2r$?

Abgabe der schriftlichen Aufgaben am Mittwoch, 4. November 2015 in den Schnellübungen.
Die Multiple-Choice-Aufgaben sind online einzureichen.