Lösung: Serie 1

1. ☐ entweder monoton wachsend oder monoton fallend.

☑ beschränkt.

☑ die Summe einer Nullfolge und einer konstanten Folge.

☐ alternierend.

Option 1: Falsch. Die Folge $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ ist zum Beispiel weder monoton wachsend noch fallend, aber trotzdem konvergent.

Option 2: Richtig. Wenn (a_n) eine gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergente Folge ist, dann existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq N$ die Ungleichung $|a_n - a| < 1$ gilt. Daraus folgt, für $n \geq N$ mit der Dreiecksungleichung, dass

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Somit ist $|a_n| \leq \max\{A, 1 + |a|\}$, wobei $A = \max\{|a_n| \mid n = 1, \ldots, N-1\}$.

Option 3: Richtig. Wenn $a_n \to a$, dann ist $(a_n) = (b_n) + (a)$, wobei die Folge $(b_n) := (a_n - a)$ eine Nullfolge ist.

Option 4: Falsch. Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)$ ist ein Gegenbeispiel für diese Aussage.

2. ☐ $q < -1$.

☐ $q = -1$.

☑ $-1 < q < 1$.

☑ $q = 1$.

☐ $q > 1$.

Für $q < -1$ wird die Folge unbegrenzt (und alternierend). Daher kann sie nicht konvergent sein.

Für $q = -1$ erhalten wir die alternierende Folge

$$(a_n) = (-a,\ a,\ -a,\ a,\ \ldots).$$

Diese Folge ist natürlich nicht konvergent.

Für $-1 < q < 1$ ist die geometrische Folge eine Nullfolge, also insbesondere konvergent.

Für $q = 1$ haben wir die konstante Folge $a_n = a$. Diese ist natürlich konvergent.

Für $q > 1$ ist die Folge unbeschränkt und damit auch nicht konvergent.

3. ☐ Die Folge ist monoton wachsend.

   ☐ Die Folge ist beschränkt.

   ☑ Die Folge ist eine Nullfolge.

   ☐ Die Folge ist konvergent.

   ☐ Der Limes der Folge ist 1.

   Für alle $n \geq 1$ gilt

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)(n+1) - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{n^2 + 3n + 2} > 0.$$

   Es folgt $a_{n+1} > a_n$, d.h. die Folge ist monoton wachsend. Weiter gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

   Somit ist die Folge beschränkt und konvergiert gegen 1 und nur die dritte Option ist anzukreuzen.

4. ☐ Eine divergente Folge ist nicht beschränkt.

   ☐ Jede beschränkte Folge ist konvergent.

   ☑ Jede konvergente Folge ist beschränkt.

   ☑ Eine nicht beschränkte Folge divergiert.

Option 1: Falsch. Z.B. ist $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und divergent.

Option 2: Falsch. Z.B. ist $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und divergent.

Option 3: Richtig. Wenn (a_n) eine gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergente Folge ist, dann existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq N$ die Ungleichung $|a_n - a| < 1$ gilt. Daraus folgt, für $n \geq N$ mit der Dreiecksungleichung, dass

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Somit ist $|a_n| \leq \max\{A, 1+|a|\}$, wobei $A = \max\{|a_n| \,|\, n = 1, \ldots, N-1\}$.

Option 4: Richtig. Wie gerade erläutert, sind konvergente Folgen beschränkt. Also müssen unbeschränkte Folgen divergieren.

5. ☐ $x < 4$.

☐ $|x| < 4$.

☐ $0 < x < 2$

☑ $-2 < x < 4$

☐ $-3 < x < 3$

Es gilt

$$||x-1|-1| < 2 \Leftrightarrow -2 < |x-1| - 1 < 2 \Leftrightarrow -1 < |x-1| < 3.$$

Da der Betrag sowieso ≥ 0 ist, ist letzteres äquivalent zu

$$|x-1| < 3 \Leftrightarrow -3 < x - 1 < 3 \Leftrightarrow -2 < x < 4.$$

6.a) Induktionsverankerung: Für $n = 1$ wird die linke und die rechte Seite der Gleichung jeweils 1.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \geq 1$ gilt (Induktionsannahme) und zeigen damit die Aussage für $n+1$. Wir rechnen, wobei wir im Schritt $(*)$ die Induktionsannahme verwenden:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + (n+1) &= (1 + 2 + 3 + \cdots + n) + (n+1) \\ &\overset{(*)}{=} \frac{n^2+n}{2} + n + 1 = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} = \frac{(n+1)^2 + n + 1}{2}. \end{aligned}$$

Dies ist genau die Aussage für $n+1$ und alles ist gezeigt.

b) Induktionsverankerung: Für $n = 0$ wird die linke Seite gleich a. Auf der rechten Seite erhalten wir

$$a \cdot \frac{1-q}{1-q} = a,$$

somit ist die Induktionsverankerung gezeigt.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \geq 0$ gilt (Induktionsannahme) und zeigen damit die Aussage für $n+1$. Wir rechnen, wobei wir im Schritt $(*)$ die Induktionsannahme verwenden:

$$\begin{aligned} a + a \cdot q + a \cdot q^2 + \cdots + a \cdot q^{n+1} &= (a + a \cdot q + a \cdot q^2 + \cdots + a \cdot q^n) + a \cdot q^{n+1} \\ &\overset{(*)}{=} a \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + a \cdot q^{n+1} \\ &= a \cdot \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = a \cdot \frac{1-q^{n+2}}{1-q}. \end{aligned}$$

Dies ist genau die Aussage für $n+1$ und alles ist gezeigt.

c) Aus Teilaufgabe a) wissen wir, dass

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Somit lässt sich die Folge für $n \geq 1$ schreiben als

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \cdots + n) \\ &= \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

Da die Folge $\left(\frac{1}{2n}\right)_{n\geq 1}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, ist $(a_n)_{n\geq 1}$ ebenso monoton fallend und gegen $\frac{1}{2}$ konvergent.

7.a) Zunächst gilt $b_0 = a$, $l_0 = \sqrt{2}\,a$ und $b_0 l_0 = \sqrt{2}\,a^2 = 1\,\mathrm{m}^2 \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\,\mathrm{m}$.

Die rekursive Definition der Formate liefert $l_k = b_{k-1}, b_k = \frac{l_{k-1}}{2}$ für $k \geq 1$.

Also:

$$b_k = \frac{a}{(\sqrt{2})^k} \text{ und } l_k = \frac{\sqrt{2}\,a}{(\sqrt{2})^k} \text{ für } k \geq 0.$$

Daraus folgt

$$\frac{l_k}{b_k} = \sqrt{2}, \quad b_k = \frac{1\,\mathrm{m}}{(\sqrt{2})^{k+\frac{1}{2}}}, \quad l_k = \frac{1\,\mathrm{m}}{(\sqrt{2})^{k-\frac{1}{2}}}.$$

b) i) Seitenlängen grösser als 1 mm heisst, dass die Breiten grösser als 1 mm sein müssen. Wir rechnen unter Verwendung der Logarithmus-Gesetze

$$
\begin{aligned}
& b_k \geq 10^{-3}\,\mathrm{m} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{1\,\mathrm{m}}{(\sqrt{2})^{k+\frac{1}{2}}} \geq 10^{-3}\,\mathrm{m} \\
\Leftrightarrow\quad & 10^3 \geq (\sqrt{2})^{k+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{k}{2}+\frac{1}{4}} \\
\Leftrightarrow\quad & \log_2(10^3) \geq \frac{k}{2} + \frac{1}{4} \\
\Leftrightarrow\quad & 3\log_2 10 \geq \frac{k}{2} + \frac{1}{4} \\
\Leftrightarrow\quad & k \leq 6\log_2 10 - \frac{1}{2} = \frac{6}{\log_{10} 2} - \frac{1}{2} \approx 19.4.
\end{aligned}
$$

Wir stapeln somit bis zum Format DIN A19. Da wir insgesamt 20 Blätter aufeinander legen, beträgt die Höhe $h = 20\,\mathrm{mm}$. Das Volumen V_k eines DIN Ak - Blattes der Stärke 1 mm beträgt weiter

$$V_k = b_k \cdot l_k \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} = \frac{1\,\mathrm{m}}{(\sqrt{2})^{k+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1\,\mathrm{m}}{(\sqrt{2})^{k-\frac{1}{2}}} \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} = \frac{1}{2^k} \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3.$$

Somit ergibt sich für das Volumen V des Stapels

$$V = \sum_{k=0}^{19} V_k = \sum_{k=0}^{19} \frac{1}{2^k} \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 = \frac{1-(\frac{1}{2})^{20}}{1-\frac{1}{2}} \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 = \left(2 - \frac{1}{2^{19}}\right) 10^{-3}\,\mathrm{m}^3.$$

ii) Analog zu oben erhalten wir

$$b_k \geq 10^{-9}\,\mathrm{m} \Leftrightarrow k \leq \frac{18}{\log_{10} 2} - \frac{1}{2} \approx 59.3.$$

Es gilt somit $k = 59$, $h = 60\,\mathrm{mm}$, $V = \left(2 - \frac{1}{2^{59}}\right) 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$.

iii) Falls b_k beliebig klein sein darf, dann gilt für $k \to \infty$ offensichtlich $h \to \infty$. Weiter:

$$V = \sum_{k=0}^{\infty} V_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 = 2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3.$$

8. • Es ist $\cos\varphi = 0$ für $\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Daher ist $\cos(3x+1) = 0$ für $3x + 1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$ und somit

$$\cos(3x+1) = 0 \iff x = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi - 1\right),\ k \in \mathbb{Z}.$$

• Es ist $\sin\varphi = 0$ für $\varphi = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Deshalb ist $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ für $\frac{1}{x} = k\pi$ und somit

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \iff x = \frac{1}{k\pi},\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

• Es ist $\cos(3x+1) = 1$ für $3x + 1 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, und somit

$$\cos(3x+1) = 1 \iff x = \frac{1}{3}(2k\pi - 1),\ k \in \mathbb{Z}.$$

• Es ist $\sin(\frac{1}{x}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ für $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ oder $\frac{1}{x} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, und somit

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff x = \frac{1}{\frac{\pi}{3} + 2k\pi} \text{ oder } x = \frac{1}{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi},\ k \in \mathbb{Z}.$$

9. Bemerke, dass f eine rationale Funktion ist und dass sie sich wie folgt faktorisieren lässt:

$$f:\ x \longmapsto \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{(x+3)(x-1)}{x(x-2)(x+1)}.$$

Wie jede rationale Funktion ist f überall in $\mathbb{R}$ ausser in den Nullstellen des Nenners definiert. Somit ist der maximale Definitionsbereich von f die Menge $\mathbb{R} \setminus \{-1,\ 0,\ 2\}$.

Die Nullstellen von f sind genau die Nullstellen des Zählers, nämlich -3 und 1.

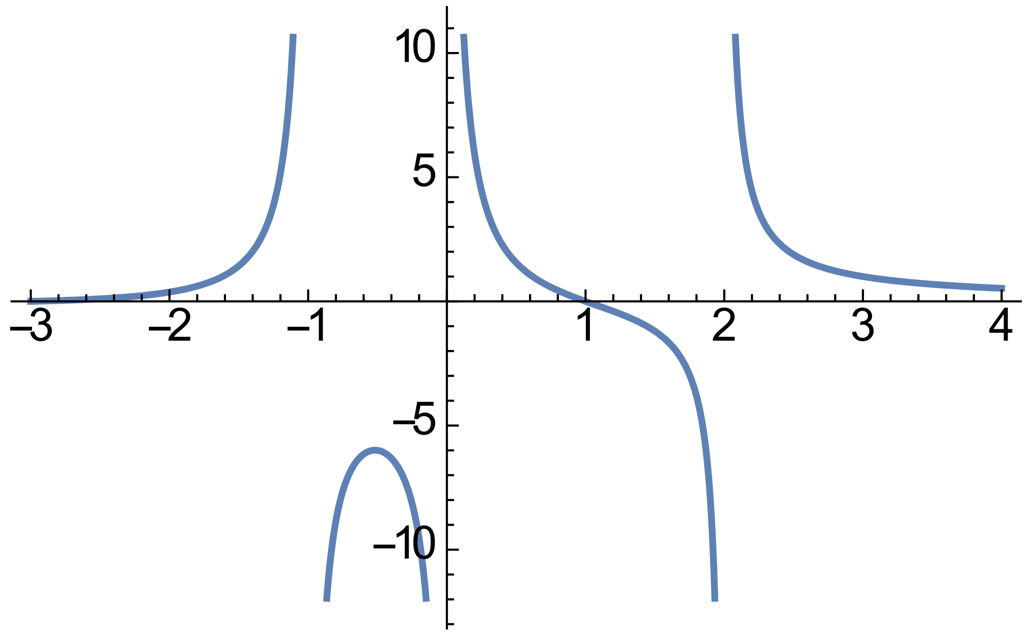
Nach Untersuchung der Vorzeichen der Faktoren im Zähler und im Nenner folgt, dass

$$P = (-3,\ -1) \cup (0,\ 1) \cup (2,\ \infty),$$

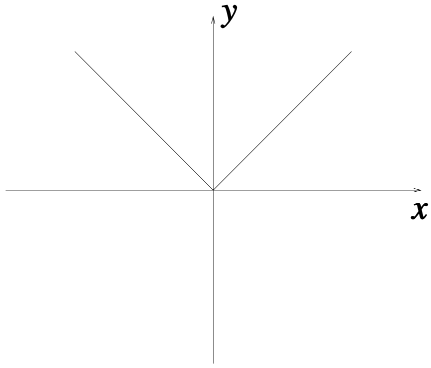
$$N = (-\infty,\ -3) \cup (-1,\ 0) \cup (1,\ 2),$$

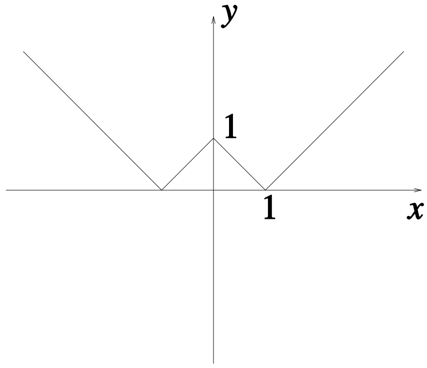
wobei P die Menge ist, in der f positiv ist und N die Menge ist, in der f negativ ist.

Der Graph $\Gamma(f)$ ist:



10. f_0, f_1:





f_{10}: