Schnellübung 6

1. Berechne die Bogenlänge der *Kardioide*, die durch die folgende Gleichung in Polarkoordinaten gegeben ist:

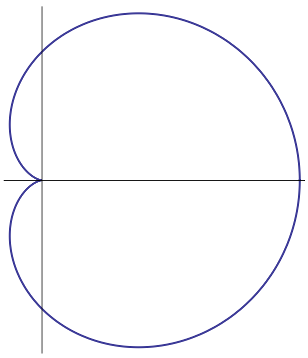
$$\rho = 2a\,(1 + \cos\phi)\,, \qquad 0 \leq \phi \leq 2\pi.$$

Dabei ist $a > 0$ eine Konstante.

Lösung
Die Bogenlänge ist in Polarkoordinaten gegeben durch

$$\begin{aligned}
s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \dot\rho^2}\, d\phi = 2a \int_0^{2\pi} \sqrt{(1+\cos\phi)^2 + \sin^2\phi}\, d\phi \\
&= 2a \int_0^{2\pi} \sqrt{2\,(1+\cos\phi)}\, d\phi = 2a \int_0^{2\pi} \sqrt{4\cos^2\tfrac{\phi}{2}}\, d\phi = 4a \int_0^{2\pi} \left|\cos\tfrac{\phi}{2}\right|\, d\phi \\
&= 4a \left(\int_0^{\pi} \cos\tfrac{\phi}{2}\, d\phi - \int_{\pi}^{2\pi} \cos\tfrac{\phi}{2}\, d\phi \right) = 8a \left(\left[\sin\tfrac{\phi}{2}\right]_0^{\pi} - \left[\sin\tfrac{\phi}{2}\right]_{\pi}^{2\pi} \right) \\
&= 8a\,(1+1) = 16a.
\end{aligned}$$

Skizze der Kardioide:



2. Wie gross ist die Fläche, welche von der Kardioide umschlossen wird?

Lösung
Der Flächeninhalt des Inneren der Kardioide ist in Polarkoordinaten gleich

$$\begin{aligned}
F &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2(\phi) d\phi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (2a(1+\cos\phi))^2 d\phi \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 4a^2(1 + 2\cos\phi + \cos^2\phi) d\phi = 2a^2 \left[\phi + 2\sin\phi + \frac{1}{2}(\phi + \sin\phi\cos\phi) \right]_0^{2\pi} \\
&= 2a^2 \cdot 3\pi = 6\pi a^2.
\end{aligned}$$

3. Wir betrachten das Tetraeder mit Ecken in $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$. Es sei h eine reelle Zahl zwischen 0 und 1.

a) Berechne den Flächeninhalt $S(h)$ des Schnittes des Tetraeders mit der Ebene $z = h$.

Lösung

Zwischen $h = 0$ und $h = 1$ nehmen die Seitenlängen des Schnittes parallel zur x- und y-Achse linear ab. Auf Höhe $z = h$ haben diese rechtwinklig aufeinanderstehenden Seiten also Länge $1 - h$, nach der Flächenformel für Dreiecke gilt also

$$S(h) = \frac{(1-h)^2}{2}.$$

b) Berechne den Volumeninhalt $V(h)$ des Tetraederstumpfes, der durch Abschneiden der Spitze durch die Ebene $z = h$ entsteht. Was gilt für $h = 1$?

Lösung

Der Volumeninhalt des Tetraederstumpfes ergibt sich durch Integration in z-Richtung und ist gleich

$$\begin{aligned} V(h) &= \int_0^h S(z)\,dz = \int_0^h \frac{(1-z)^2}{2}\,dz = -\frac{1}{6}\left[(1-z)^3\right]_0^h \\ &= -\frac{1}{6}\left((1-h)^3 - 1\right) = \frac{1}{6}(1-(1-h)^3) = \frac{h^3 - 3h^2 + 3h}{6}. \end{aligned}$$

Im Fall $h = 1$ bekommen wir den Volumeninhalt des Tetraeders:

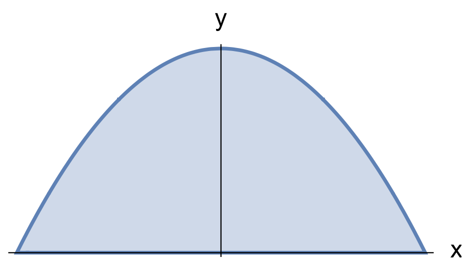
$$V(1) = \frac{1}{6}.$$

4. Bestimme die Menge aller Parabeln der Form $y = -ax^2 + b$, $a > 0$, $b > 0$, welche mit der x-Achse die Fläche $\frac{4}{3}$ einschliessen.

Hinweis: Skizziere die Situation!

Lösung

Die Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse sind durch die Nullstellen von $-ax^2+b$ gegeben, nämlich $x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$. Die Fläche unter der Parabel ist wegen der Symmetrie gegeben durch



$$\begin{aligned} F(a,b) &= 2\cdot\int_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} \left(-ax^2 + b\right)dx = 2\left[-\frac{a}{3}x^3 + bx\right]_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} \\ &= 2\left(-\frac{a}{3}\frac{b^{3/2}}{a^{3/2}} + b\cdot\frac{b^{1/2}}{a^{1/2}}\right) = \frac{4}{3}\cdot\frac{b^{3/2}}{a^{1/2}}. \end{aligned}$$

Es gilt $F(a,b) = \frac{4}{3}$ genau dann, wenn $a = b^3$. Somit ist die gesuchte Schar gegeben durch

$$f(x) = -b^3x^2 + b\,, \quad b > 0\,.$$