Serie 11

1. Berechne die Bogenlänge s der Spirale, die gegeben ist durch

$$t \mapsto \vec{r}(t) = e^{-t}(\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

wobei $T \to \infty$.

i) ✗ $s = 3$
ii) ✗ ∞
iii) ✗ $s = 2$
iv) ✗ $s = \frac{\sqrt{2}}{2}$
v) ✗ $s = \frac{1}{2}$
vi) ✓ $s = \sqrt{2}$

Lösung
Es gilt zunächst

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{r}(t)}{dt} &= (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = -e^{-t}(\cos t, \sin t) + e^{-t}(-\sin t, \cos t) \\ &= e^{-t}(-\cos t - \sin t, \cos t - \sin t).\end{aligned}$$

Für fixes T ist die Bogenlänge damit gegeben durch

$$\begin{aligned}s &= \int_0^T \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt = \int_0^T e^{-t}\sqrt{(-\cos t - \sin t)^2 + (\cos t - \sin t)^2}\, dt \\ &= \int_0^T e^{-t}\sqrt{\cos^2 t + 2\cos t \sin t + \sin^2 t + \cos^2 t - 2\cos t \sin t + \sin^2 t}\, dt \\ &= \int_0^T e^{-t}\sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\left[-e^{-t}\right]_0^T = \sqrt{2}(1 - e^{-T}).\end{aligned}$$

Die Gesamtlänge der Kurve erhalten wir, indem wir T gegen ∞ streben lassen. Wir erhalten also $s = \sqrt{2}$.

2. Die Kurve K ist gegeben durch die Parameterdarstellung

$$x(t) = \int_1^t \frac{\cos(u)}{u} du, \quad y(t) = \int_1^t \frac{\sin(u)}{u} du,$$

wobei $t \geq 1$. Was ist die Bogenlänge von K vom Koordinatenursprung bis zum ersten Punkt mit vertikaler Tangente?

i) ✓ $\log\left(\frac{\pi}{2}\right)$
ii) ✗ $\frac{3\pi}{2}$
iii) ✗ $\log\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

iv) ✗ $\frac{\pi}{2}$

Lösung
Zur Parametrisierung $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ mit $t_A \leq t \leq t_B$ ist die Bogenlänge gegeben durch

$$s = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt,$$

wir müssen zunächst also t_A und t_B bestimmen. Da wir im Punkt $(0, 0)$ starten sollen, gilt offensichtlich $t_A = 1$.
Der Tangentialvektor $\dot{r}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ an die Kurve K ist vertikal, wenn $\dot{x}(t) = 0$ und $\dot{y}(t) \neq 0$ gilt. Mit dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung muss also

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}\int_1^t \frac{\cos(u)}{u} du = \frac{\cos(t)}{t} = 0$$

und

$$\dot{y}(t) = \frac{d}{dt}\int_1^t \frac{\sin(u)}{u} du = \frac{\sin(t)}{t} \neq 0$$

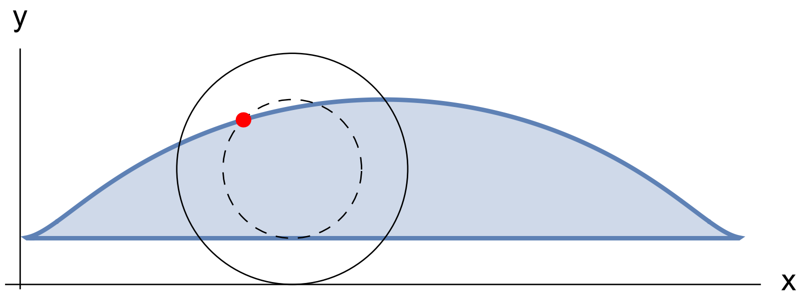
gelten. Der erste Punkt mit vertikaler Tangente ist somit bei $t = \frac{\pi}{2}$. Die gesuchte Bogenlänge ist also

$$\begin{aligned} s &= \int_1^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt = \int_1^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{\cos t}{t}\right)^2 + \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2} dt \\ &= \int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{t} = \Big[\log |t|\Big]_1^{\frac{\pi}{2}} = \log\left(\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

3. Die verkürzte Zykloide ist die Kurve, die von einem Punkt auf einem rollenden Rad beschrieben wird. Eine Parameterdarstellung ist gegeben durch

$$x(t) = at - b\sin t, \quad y(t) = a - b\cos t,$$

mit $a > b > 0$. Berechne den Flächeninhalt der gefärbten Fläche.



i) ✗ $(2a^2 + b^2 - 2ab)\pi$

ii) ✗ $(2a^2 - 2a + b^2 - 2b)\pi$

iii) ✗ $(2a^2 + b^2)\pi$

iv) ✓ $(b^2 + 2ab)\pi$

Lösung

Die Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse von x_0 bis x_1 ist gegeben durch

$$A = \int_{x_0}^{x_1} y\,dx.$$

Da wir jedoch $y(t)$ gegeben haben, müssen wir die Substitution $x = at - b\sin t$ vornehmen. Es gilt

$$\frac{dx}{dt} = a - b\cos t,$$

also

$$dx = (a - b\cos t)\,dt.$$

Die Schranken sind zwei aufeinanderfolgende Minimalstellen der Funktion $y(t)$. Wegen

$$\dot{y}(t) = b\sin t = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

und

$$y(k\pi) = a - b\cos k\pi = \begin{cases} a - b, & \text{für } k \text{ gerade;} \\ a + b, & \text{für } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

folgt, dass zwei aufeinanderfolgende Minimalstellen bei $t_0 = 0$ und $t_1 = 2\pi$ liegen. Daraus sehen wir auch, was die Konstanten a und b bedeuten: Die Zahl a ist der Radius des rollenden Rades und b ist der Abstand des Punktes zum Mittelpunkt des Rades. Somit rechnen wir

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} (a - b\cos t)(a - b\cos t)\,dt = \int_0^{2\pi} (a^2 - 2ab\cos t + b^2\cos^2 t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(a^2 - 2ab\cos t + b^2 \cdot \frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt \\ &= \left[a^2 t - 2ab\sin t + \frac{b^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = 2a^2\pi + b^2\pi. \end{aligned}$$

Vorsicht, das ist noch nicht das gesuchte Resultat, da nicht die gesamte Fäche A eingefärbt ist! Konkret müssen wir noch die Fläche des Rechtecks mit Seitenlängen $y(0) = a - b$ (Höhe) und $x(2\pi) = 2a\pi$ (Breite) abziehen. Die Breite ist natürlich genau der Umfang des Rades. Der Flächeninhalt der gefärbten Fläche ist also gleich

$$2a^2\pi + b^2\pi - 2a(a - b)\pi = (b^2 + 2ab)\pi.$$

4. Berechne die Oberfläche des Körpers, der durch Rotation der Kurve

$$y = \cos x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

um die x-Achse entsteht.

i) ✗ $\log(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}$

ii) ✗ 0

iii) ✓ $2\pi\left(\log(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}\right)$

iv) ✗ $2\pi\left(\log(1+\sqrt{2})+2\right)$

Lösung
Da die Kurve explizit als Funktion beschrieben ist, erhalten wir eine Parametrisierung durch

$$x(t)=t, \quad y(t)=\cos(x(t))=\cos t, \quad t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

Einsetzen in die bekannte Formel für die Oberfläche (oder genauer Mantelfläche) liefert

$$O=2\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2} y(t)\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}\,dt=2\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos t\sqrt{1+\sin^2 t}\,dt.$$

Mit der Substitution $u=\sin t$ erhalten wir $du=\cos t\,dt$ und $t=\pm\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow u=\pm 1$. Also gilt

$$\begin{aligned}
O&=2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1+u^2}\,du \overset{(*)}{=} 2\pi\left[\frac{1}{2}\left(\operatorname{arsinh}(u)+u\sqrt{u^2+1}\right)\right]_{u=-1}^{u=1}\\
&=\pi\left(\operatorname{arsinh}(1)-\operatorname{arsinh}(-1)+\sqrt{2}-\left(-\sqrt{2}\right)\right)=2\pi\left(\operatorname{arsinh}(1)+\sqrt{2}\right)\\
&=2\pi\left(\log\left(1+\sqrt{1^2+1}\right)+\sqrt{2}\right)=2\pi\left(\log(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}\right).
\end{aligned}$$

Zu $(*)$: Eine Stammfunktion von $\sqrt{1+u^2}$ lässt sich mit partieller Integration bestimmen.

5. Berechne das Volumen des Körpers, der durch Rotation der Kurve

$$y=\cos x, \quad x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

um die x-Achse entsteht.

i) ✗ $\dfrac{\pi^4}{6}$

ii) ✓ $\dfrac{\pi^2}{2}$

iii) ✗ $\dfrac{\pi^3}{3}$

iv) ✗ π

Lösung
Schneiden wir den Rotationskörper parallel zur (y,z)-Ebene auf Höhe x, so ist die Schnittfigur ein Kreis mit Radius $y(x)$. Die Schnittfigur hat also die Fläche

$$F(x)=y(x)^2\pi=\pi\cos^2 x.$$

Integrieren wir nach x, so finden wir das Volumen mit der bekannten Formel:

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(x)\,dx = \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x\,dx \\
&= \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{\pi}{2}\left[x + \frac{\sin 2x}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi^2}{2}.
\end{aligned}$$

6. Es sei $f(x) = \log\left(\frac{\cosh(x)-1}{\sinh(x)}\right)$ für $x > 0$.

a) Berechne die Ableitung $f'(x)$.
Lösung
Beachte, dass die Funktion f für alle $x > 0$ definiert ist, da für solche Werte $\sinh x > 0$ und $\cosh x > 1$ sind, das Argument des Logarithmus' also immer strikt positiv ist. Wir bestimmen jetzt $f'(x)$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\sinh x}{\cosh x - 1} \cdot \frac{\sinh^2 x - (\cosh x - 1)\cosh x}{\sinh^2 x} \\
&= \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x + \cosh x}{\sinh x\,(\cosh x - 1)} = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x\,(\cosh x - 1)} = \frac{1}{\sinh x}.
\end{aligned}$$

b) Bestimme die Bogenlänge des Graphen von f über dem Intervall $[a,\, b]$, $0 < a < b$.
Lösung
Für die Berechnung der Bogenlänge s wenden wir die Formel

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

an. Wir haben also

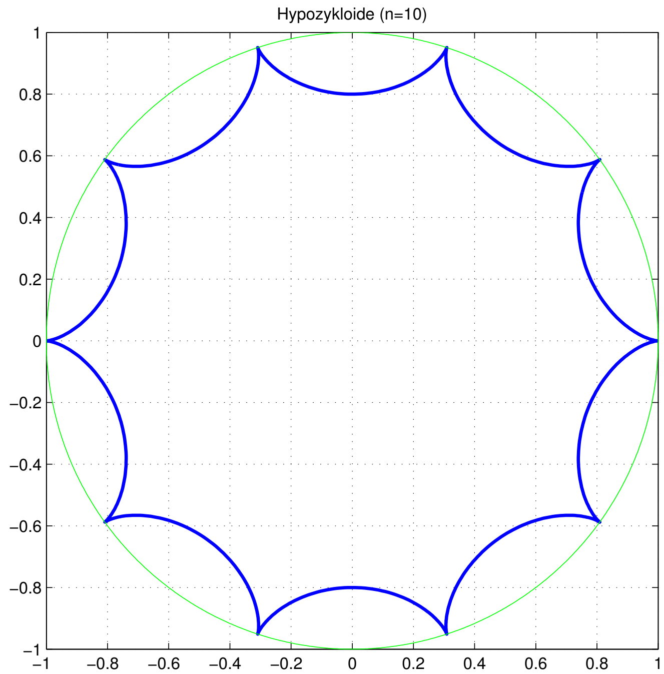
$$\begin{aligned}
s &= \int_a^b \sqrt{1 + \frac{1}{\sinh^2 x}}\,dx = \int_a^b \sqrt{\frac{\sinh^2 x + 1}{\sinh^2 x}}\,dx \\
&= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\cosh x}{\sinh x}\right)^2}\,dx \overset{(*)}{=} \int_a^b \frac{\cosh x}{\sinh x}\,dx \\
&= \Big[\log(|\sinh x|)\Big]_a^b \overset{(*)}{=} \log(\sinh b) - \log(\sinh a) \\
&= \log\left(\frac{\sinh b}{\sinh a}\right).
\end{aligned}$$

Bei den Sternchen $(*)$ haben wir benutzt, dass $x, a, b > 0$ sind und deshalb auch $\sinh x, \sinh a, \sinh b > 0$.

7. Im Innern des Kreises mit Radius 1 rolle ein kleiner Kreis C mit Radius $1/n$, $n = 3, 4, \ldots$ ab. Ein Punkt der Peripherie des Kreises C beschreibt dann eine geschlossene Kurve K (*Hypozykloide*), welche durch die Parametrisierung $(0 \le \varphi \le 2\pi)$

$$x(\varphi) = \frac{1}{n}((n-1)\cos\varphi + \cos((n-1)\varphi))$$
$$y(\varphi) = \frac{1}{n}((n-1)\sin\varphi - \sin((n-1)\varphi))$$

beschrieben wird.



a) Man berechne in Abhängigkeit von n die durch die Kurve K eingeschlossene Fläche.

Lösung

Nach der Berechnung der Ableitungen von x und y erhält man

$$x(\varphi)\dot{y}(\varphi) = \frac{n-1}{n^2}\left((n-1)\cos^2\varphi - (n-2)\cos\varphi\cos((n-1)\varphi) - \cos^2((n-1)\varphi)\right),$$

$$\dot{x}(\varphi)y(\varphi) = -\frac{n-1}{n^2}\left((n-1)\sin^2\varphi + (n-2)\sin\varphi\sin((n-1)\varphi) - \sin^2((n-1)\varphi)\right).$$

Aus der Beziehung $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \cos(\alpha+\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$ erhalten wir für $\alpha = \varphi$ und $\beta = (n-1)\varphi$ die Gleichung

$$\cos(\varphi)\cos((n-1)\varphi) = \cos(n\varphi) + \sin(\varphi)\sin((n-1)\varphi);$$

Daraus erhalten wir

$$x(\varphi)\dot{y}(\varphi) - \dot{x}(\varphi)y(\varphi) = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}(1 - \cos n\varphi).$$

Die gesuchte Fläche ist somit gegeben durch die Formel für die Sektorfläche und wir erhalten

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x(\varphi)\dot{y}(\varphi) - \dot{x}(\varphi)y(\varphi)\, d\varphi = \frac{(n-1)(n-2)}{2n^2}\int_0^{2\pi}(1 - \cos n\varphi)\, d\varphi \\ &= \frac{(n-1)(n-2)}{2n^2}\left[\varphi - \frac{\sin n\varphi}{n}\right]_0^{2\pi} = \frac{(n-1)(n-2)}{2n^2}\cdot 2\pi \\ &= \frac{(n-1)(n-2)\pi}{n^2}. \end{aligned}$$

b) Für welche n ist diese Fläche grösser als 2/3 der Fläche des grossen Kreises?

Lösung

Der grosse Kreis hat Fläche π; gesucht sind also die Zahlen $n = 3,\ 4,\ \ldots$, für welche das Folgende gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{(n-1)(n-2)\pi}{n^2} > \frac{2}{3}\pi \\ \Longleftrightarrow\quad & 3n^2 - 9n + 6 > 2n^2 \\ \Longleftrightarrow\quad & n(n-9) + 6 > 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & n = 9,\ 10,\ \ldots \end{aligned}$$

8. Man bestimme die Oberfläche des Rotationsellipsoids

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{16} = 1.$$

Lösung

Dieses Rotationsellipsoid ist symmetrisch bezüglich der y und z-Achse; deshalb entsteht es durch Rotation der Ellipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$$

um die x-Achse. Hieraus erhält man $y = \pm\sqrt{16\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)} = \pm\sqrt{4(4-x^2)}$.

Wir parametrisieren nun den oberen Rand der Ellispe:

$$x(t) = t, \quad y(t) = \sqrt{4(4-t^2)}, \quad \dot{y}(t) = \frac{-4t}{\sqrt{4(4-t^2)}}$$

und

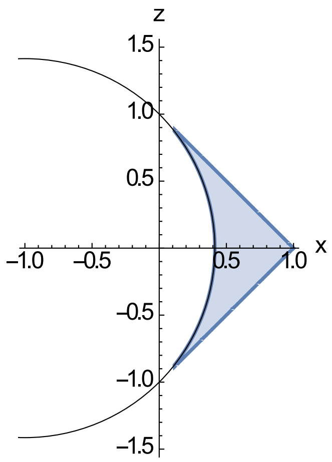
$$\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 = 1 + 4\,\frac{t^2}{4-t^2}.$$

Jetzt kann man die Oberfläche O berechnen:

$$\begin{aligned} O &= 2\pi \int_{-2}^{2} y(t)\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt = 2\pi \int_{-2}^{2} 2\sqrt{4-t^2}\sqrt{1 + 4\,\frac{t^2}{4-t^2}}\, dt \\ &= 4\pi \int_{-2}^{2} \sqrt{4+3t^2}\, dt = 8\pi \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + \frac{3}{4}t^2}\, dt \overset{(*)}{=} 8\pi\sqrt{\frac{4}{3}} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{1+s^2}\, ds \\ &= \frac{16\pi}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{2}\left(\operatorname{arsinh}(s) + s\sqrt{s^2+1}\right)\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{16\pi}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arsinh}(\sqrt{3}) + 2\sqrt{3}\right) \\ &= 32\pi + \frac{16\pi}{\sqrt{3}} \operatorname{arsinh}(\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Bei $(*)$ wurde $s = \sqrt{\frac{3}{4}}\, t$ substituiert.

9. Das markierte Gebiet wird um die z-Achse rotiert. Man berechne das Volumen.



Der Kreis hat dabei den Mittelpunkt $(-1, 0)$ und geht durch die beiden Punkte $(0, \pm 1)$.

Lösung
Wir betrachten wegen Symmetriegründen nur den Teil oberhalb der xy-Ebene. Das gesuchte Volumen lässt sich wie folgt als Differenz zweier Volumina berechnen.

Zunächst rotieren wir die Gerade $x_1(z) = 1 - z$ um die z-Achse (es entsteht ein Kegel). Für $z \in [0, 1]$ bezeichne $F_1(z)$ die Schnittfläche des Kegels auf Höhe z. Betrachten wir nun den Kreis in der Skizze, er hat die Gleichung $z^2 + (x+1)^2 = 2$. Nun rotieren wir das Kreisstück, beschrieben durch $x_2(z) = \sqrt{2 - z^2} - 1$ $(0 \le z \le 1)$, um die z-Achse; es entsteht eine Linse. Es bezeichne $F_2(z)$ deren Schnittfläche auf Höhe z. Sodann gilt

$$V = V_1 - V_2 = 2\int_0^1 F_1(z)\, dz - 2\int_0^1 F_2(z)\, dz.$$

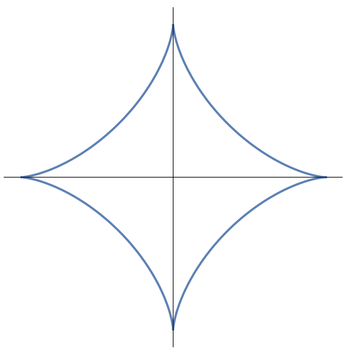
Die Schnittflächen $F_1(z)$ und $F_2(z)$ sind jeweils Kreise mit Radius $x_1(z)$, beziehungsweise $x_2(z)$. Also gilt

$$\begin{aligned}
V_1 &= 2\int_0^1 \pi(1-z)^2\,dz = 2\pi\left[-\frac{(1-z)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{3},\\
V_2 &= 2\int_0^1 \pi\left(\sqrt{2-z^2}-1\right)^2 dz = 2\pi\int_0^1\left(2-z^2-2\sqrt{2-z^2}+1\right)dz\\
&= 2\pi\left(\int_0^1\left(3-z^2\right)dz - 2\sqrt{2}\int_0^1\sqrt{1-\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dz\right)\\
&\overset{(*)}{=} 2\pi\left(\left[3z-\frac{z^3}{3}\right]_0^1 - 4\int_0^{1/\sqrt{2}}\sqrt{1-u^2}\,du\right)\\
&= 2\pi\left(\frac{8}{3}-4\cdot\frac{1}{2}\left[u\sqrt{1-u^2}+\arcsin u\right]_{u=0}^{u=1/\sqrt{2}}\right)\\
&= 2\pi\left(\frac{8}{3}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{10\pi}{3}-\pi^2,
\end{aligned}$$

dabei haben wir in $(*)$ die Substitution $u = \frac{1}{\sqrt{2}}z$ durchgeführt.
Das gesuchte Volumen ist damit

$$V = V_1 - V_2 = \pi^2 - \frac{8\pi}{3}.$$

10. Es sei die *Astroide* durch die folgende Parameterdarstellung gegeben:



$$x(t) = a\cos^3 t$$
$$y(t) = a\sin^3 t, \qquad \text{für } 0 \le t \le 2\pi.$$

Dabei ist $a > 0$ eine feste Zahl. Berechne in Abhängigkeit von a

a) die Bogenlänge der Astroide;

Lösung

Für unsere Rechnungen nützen wir immer wieder die vorhandene Symmetrie aus; im ersten Quadranten läuft der Parameter t von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ und die gesamte Bogenlänge ist das Vierfache der Bogenlänge im ersten Quadranten, analog für die Fläche.

Mit $\dot{x}(t) = -3a\cos^2 t \sin t$ und $\dot{y}(t) = 3a\sin^2 t \cos t$ ergibt sich für die Bogenlänge der Astroide

$$\begin{aligned} s &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t}\, dt \\ &= 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\, dt = 12a\left[\tfrac{1}{2}\sin^2 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a. \end{aligned}$$

b) die Fläche des Astroidensterns;

Lösung

Die Fläche des Astroidensterns ist

$$\begin{aligned} F &= 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t))\, dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3a^2(\cos^4 t\sin^2 t + \cos^2 t\sin^4 t))\, dt \\ &= 6a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 t(1-\cos^2 t) + (1-\sin^2 t)\sin^4 t)\, dt. \end{aligned}$$

Integrale dieser Art wurden in Kapitel III.6 des Buches besprochen; mit den dort eingeführten Notationen gilt

$$F = 6a^2(J_4 - J_6 + I_4 - I_6) = 12a^2(I_4 - I_6),$$

da $I_n = J_n$ gilt für $n \in \mathbb{N}_0$. Einsetzen der im Buch gefundenen Resultate ergibt

$$F = 12a^2\left(\frac{3\pi}{16} - \frac{5}{6}\cdot\frac{3\pi}{16}\right) = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

c) das Volumen des Rotationskörpers, der erhalten wird, wenn die Astroide um die x-Achse gedreht wird;

Lösung

Der Schnitt des Körpers mit einer Ebene parallel zur (y,z)-Ebene ist ein Kreis. Die implizite Darstellung der Kurve ist gegeben durch

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

wie man aus der Parameterdarstellung ablesen kann. Um den Radius des Schnittkreises zu berechnen, bestimmen wir lokal die explizite Darstellung zu $y(x) = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$, welche für $0 \le x \le a$ gilt und damit die Kurve im ersten Quadranten beschreibt. Die Fläche des Kreises ist $\pi \cdot y(x)^2$, also erhalten wir als Volumen

$$V = 2\int_0^a \pi y(x)^2\, dx = 2\int_0^a \pi\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx = 2\pi a^2\int_0^a \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx.$$

Nun substituieren wir $u = (\frac{x}{a})^{\frac{2}{3}}$, wir erhalten $x = au^{\frac{3}{2}}$ und $dx = \frac{3}{2}a\sqrt{u}du$ mit den Grenzen 0 und 1. Also gilt

$$\begin{aligned} V &= 2\pi a^2 \int_0^a \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx = 2\pi a^2 \cdot \tfrac{3}{2}a \int_0^1 (1-u)^3 \sqrt{u}\, du \\ &= 3\pi a^3 \int_0^1 (1 - 3u + 3u^2 - u^3)u^{\frac{1}{2}}\, du = 3\pi a^3 \int_0^1 u^{\frac{1}{2}} - 3u^{\frac{3}{2}} + 3u^{\frac{5}{2}} - u^{\frac{7}{2}}\, du \\ &= 3\pi a^3 \left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - \frac{6}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{6}{7}u^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{9}u^{\frac{9}{2}}\right]_0^1 = \frac{32}{105}\pi a^3. \end{aligned}$$

d) die Oberfläche dieses Rotationskörpers.

Lösung

Gemäss der Formel für Oberflächenintegrale erhalten wir

$$\begin{aligned} O &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi y(t)\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}\, dt = 12\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t\, dt \\ &= \frac{12}{5}\pi a^2 \left[\sin^5 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{12}{5}\pi a^2. \end{aligned}$$

Abgabe der schriftlichen Aufgaben am Mittwoch, 9. Dezember 2015 in der Vorlesung. Die Multiple-Choice-Aufgaben sind online einzureichen.