D-MAVT, D-MATL
Prof. Dr. Urs Lang

Analysis I
HS 15

Serie 10

1. Welches der folgenden Integrale stimmt im Allgemeinen nicht mit den anderen überein?

i) ✗ $\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$
ii) ✗ $\int_b^a (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$
iii) ✗ $\int_a^b (f(t) - g(t))\,\mathrm{d}t$
iv) ✓ $\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}u$

Lösung
Das zweite Integral geht aus dem ersten durch Vertauschen der Integrationsgrenzen hervor. Das dabei entstehende negative Vorzeichen wurde in den Integranden eingebaut:

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x &= -\int_b^a (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \int_b^a -(f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_b^a (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Das dritte Integral entsteht aus dem ersten durch die Substitution $x = t$.

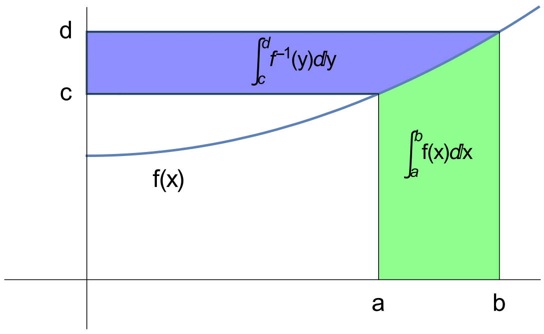
Beim vierten Integral wurde die Integrationsvariable in u geändert, im Integranden steht jedoch weiterhin x. Formal handelt es sich hier also um das Integral der in u konstanten Funktion $u \mapsto f(x) - g(x)$, also etwas völlig anderes als im ersten Integral.

2. Es sei $f : [a, b] \to [c, d]$ eine stetig differenzierbare, streng monoton wachsende und surjektive Funktion mit Umkehrfunktion f^{-1}.

Dann gilt $\displaystyle\int_c^d f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y = \ldots$

i) ✗ $bd - ac - \displaystyle\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x.$
ii) ✓ $bd - ac - \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$
iii) ✗ $\dfrac{1}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}.$
iv) ✗ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

Lösung
Da f streng monoton wachsend und surjektiv ist, gilt $f(a) = c$ und $f(b) = d$ (siehe Skizze). Den Graphen von f^{-1} sehen wir, wenn wir die Rollen der x- und y-Achse vertauschen. Die korrekte Beziehung lässt sich nun geometrisch einfach aus der Skizze ablesen.



Wir erhalten das Resultat auch durch Substitution $y = f(x)$, $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$ und anschliessender partieller Integration:

$$\begin{aligned}\int_c^d f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y &= \int_a^b x \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= [x \cdot f(x)]_a^b - \int_a^b 1 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= bd - ac - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

3. Sei $f(x) := \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^3+2}}$. Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?

i) ✗ $f(1) > 0$

ii) ✓ $f(-1) > 0$

iii) ✗ $f(-\frac{1}{2}) < 0$

iv) ✗ $f(0) = 0$

- **Lösung**

  Option 1: $f(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^3+2}}\,\mathrm{d}t > 0$, da der Integrand auf $[0,1]$ positiv ist.

- **Lösung**

  Option 2: $f(-1) = \displaystyle\int_0^{-1} \frac{1}{\sqrt{t^3+2}}\,\mathrm{d}t = -\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{t^3+2}} < 0$, da der Integrand auf $[-1,0]$ positiv ist.

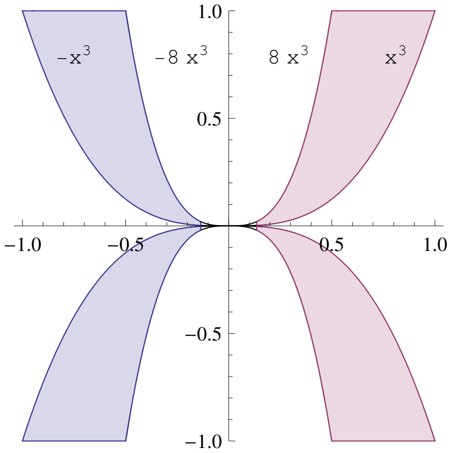
- **Lösung**

  Option 3: $f(-\frac{1}{2}) = \displaystyle\int_0^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{t^3+2}}\,\mathrm{d}t = -\int_{-1/2}^0 \frac{1}{\sqrt{t^3+2}} < 0$, da der Integrand auf $[-1/2,0]$ positiv ist.

- **Lösung**

  Option 4: $f(0) = \displaystyle\int_0^0 \frac{1}{\sqrt{t^3+2}}\,\mathrm{d}t = 0$.

4. Berechne die Fläche des unten dargestellten x-förmigen Bereichs.



i) ✗ 2

ii) ✓ $\frac{3}{2}$

iii) ✗ $\frac{3}{4}$

iv) ✗ 3

Lösung

Aus Symmetriegründen gilt für die gesuchte Fläche $F = 4A$, wobei A die Fläche des Bereichs im ersten Quadranten bezeichnet.

Es gilt: $8x^3 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Um die Fläche mithilfe des Integrals zu berechnen, teilen wir das Intervall bei $x = \frac{1}{2}$ auf und erhalten

$$\begin{aligned} F = 4A &= 4\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(8x^3 - x^3\right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(1 - x^3\right) dx\right) \\ &= 4\left(\left[\frac{7x^4}{4}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[x - \frac{x^4}{4}\right]_{\frac{1}{2}}^1\right) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Die Integration über die Variable y ist etwas einfacher durchzuführen: für $y = f(x) = x^3$ erhalten wir $x = y^{1/3}$, und für $y = g(x) = 8x^3$ wird $x = \frac{1}{2}\,y^{1/3}$. Also ist

$$F = 4A = 4\int_0^1 \left(y^{1/3} - \tfrac{1}{2}\,y^{1/3}\right) dy = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^1 y^{1/3}\,dy = 2\left[\tfrac{3}{4}\,y^{4/3}\right]_0^1 = \frac{3}{2}.$$

5. Eine geschlossene Kurve $[0,1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto (x(t), y(t))$ wird um den Faktor $a > 0$ gestreckt, das heisst, man erhält eine neue Kurve $[0,1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto (ax(t), ay(t))$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

i) ✓ Die Bogenlänge der neuen Kurve ist das a-te Vielfache der Bogenlänge der alten Kurve.

ii) ✗ Die Bogenlänge der neuen Kurve ist das a^2-te Vielfache der Bogenlänge der alten Kurve.

iii) ✗ Die Bogenlänge der neuen Kurve ist das $\sqrt{a}$-te Vielfache der Bogenlänge der alten Kurve.

iv) ✗ Die eingeschlossene Fläche der neuen Kurve ist das a-te Vielfache der eingeschlossenen Fläche der alten Kurve.

v) ✓ Die eingeschlossene Fläche der neuen Kurve ist das a^2-te Vielfache der eingeschlossenen Fläche der alten Kurve.

vi) ✗ Die eingeschlossene Fläche der neuen Kurve ist das $\sqrt{a}$-te Vielfache der eingeschlossenen Fläche der alten Kurve.

Lösung
Die Bogenlänge der neuen Kurve berechnet sich durch

$$\int_0^1 \sqrt{(a\dot{x}(t))^2 + (a\dot{y}(t))^2}\,\mathrm{d}t = a\int_0^1 \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,\mathrm{d}t;$$

also das a-te Vielfache.

Die eingeschlossene Fläche der neuen Kurve ist

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (ax(t)a\dot{y}(t) - a\dot{x}(t)ay(t))\,\mathrm{d}t = a^2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^1 (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t))\,\mathrm{d}t;$$

also das a^2-te Vielfache.

Was beides zu erwarten war: Längen strecken sich eindimensional, Flächen zweidimensional.

6. Berechne die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-x}\sin(nx)\,dx$, wobei $n \in \mathbb{N}_0$;

Lösung
Für $n = 0$ ist das Integral gleich 0, da $\sin(0) = 0$. Sei von nun an also $n \neq 0$. Zweimaliges partielles Integrieren liefert

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \underbrace{e^{-x}}_{\downarrow}\underbrace{\sin(nx)}_{\uparrow}\,dx &= \left[-\frac{e^{-x}\cos(nx)}{n}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} \underbrace{e^{-x}}_{\downarrow}\underbrace{\cos(nx)}_{\uparrow}\,dx \\
&= \frac{1-e^{-2\pi}}{n} - \underbrace{\left[\frac{e^{-x}\sin(nx)}{n^2}\right]_0^{2\pi}}_{=0} + \int_0^{2\pi} -\frac{e^{-x}\sin(nx)}{n^2}\,dx \\
&= \frac{1-e^{-2\pi}}{n} - \frac{1}{n^2}\int_0^{2\pi} e^{-x}\sin(nx)\,dx.
\end{aligned}$$

Wenn wir das gesuchte Integral mit I bezeichnen, so gilt also die Gleichung

$$\begin{aligned} && I &= \frac{1-e^{-2\pi}}{n} - \frac{1}{n^2}\cdot I \\ \iff && \left(1+\frac{1}{n^2}\right) I &= \frac{1-e^{-2\pi}}{n} \\ \iff && \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right) I &= \frac{1-e^{-2\pi}}{n} \\ \iff && I &= \frac{(1-e^{-2\pi})n}{n^2+1}. \end{aligned}$$

Also: $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-x}\sin(nx)\,dx = \frac{(1-e^{-2\pi})n}{n^2+1}$.

b) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^4+3}$;

Lösung

Mit der Substitution $u = x^2$ gilt $du = 2x\,dx$, oder auch $x\,dx = \frac{1}{2}\,du$. Daher haben wir

$$\begin{aligned} \int \frac{x\,dx}{x^4+3} &= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+3} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{3\left(\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\,du}{\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2+1} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right) + C = \frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x^2\right) + C. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir dabei $u = x^2$ rücksubstituiert.

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$;

Lösung

Wir wählen die Substitution $z = \sqrt{e^x-1}$, also $x = \log(z^2+1)$. Dann ist $dx = \frac{2z}{1+z^2}\,dz$, und damit folgt

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}} &= \int \frac{2z\,dz}{(1+z^2)z} = \int \frac{2\,dz}{1+z^2} \\ &= 2\arctan z + C = 2\arctan\sqrt{e^x-1} + C. \end{aligned}$$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh x}\,dx$;

Lösung

Einsetzen der Definition von $\cosh x$ liefert

$$\int \frac{dx}{\cosh x} = \int \frac{2\,dx}{e^x+e^{-x}}.$$

Nun bietet sich die Substitution $z = e^x$ an, also gilt $x = \log z$ und damit $dx = \frac{1}{z}\,dz$. Es folgt

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\cosh x} &= \int \frac{2\,dz}{z\,(z+z^{-1})} = \int \frac{2\,dz}{z^2+1} = 2\arctan z + C \\ &= 2\arctan(e^x) + C.\end{aligned}$$

Variante: Wir erweitern mit $\cosh x$ und benutzen die Identität $\cosh^2 x = 1+\sinh^2 x$.

$$\int \frac{dx}{\cosh x} = \int \frac{\cosh x}{\cosh^2}\,dx = \int \frac{\cosh x}{1+\sinh^2 x}\,dx.$$

Nun substituieren wir $u = \sinh x$, d. h. $du = \cosh x\,dx$. Also

$$\int \frac{dx}{\cosh x} = \int \frac{du}{1+u^2} = \arctan(u) + D = \arctan(\sinh x) + D.$$

Diese beiden Stammfunktionen $2\arctan(e^x)$ und $\arctan(\sinh x)$ von $\frac{1}{\cosh x}$ unterscheiden sich tatsächlich nur um eine Konstante (um $\frac{\pi}{2}$), das ist aber nicht ganz einfach zu zeigen!

e) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\arcsin\left(\sqrt{1-4x^2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}\,dx;$

Lösung
Im Kapitel über die Umkehrfunktion haben wir gesehen, dass $\arcsin(\sin u) = u$ gilt für $u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Weiter gilt $\sin u = \sqrt{1-\cos^2 u}$. Diese Beziehungen können wir offenbar mit der Substitution $2x = \cos u$ ausnutzen; also gilt $2\,dx = -\sin u\,du$. Ausserdem ist die Funktion $x(u) = \frac{1}{2}\cos u$ für $u \in [0,\pi]$ invertierbar, nämlich $u = \arccos(2x)$. Wir transformieren die Grenzen:

$$x = 0 \Rightarrow u = \arccos(0) = \tfrac{\pi}{2}, \quad x = \tfrac{1}{4} \Rightarrow u = \arccos(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{\pi}{3}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\arcsin\sqrt{1-4x^2}}{\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}\,dx &= 2\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\arcsin\sqrt{1-4x^2}}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx \\ &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\arcsin(\sin u)}{\sin u}\sin u\,du \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} u\,du = \left[\frac{1}{2}u^2\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5}{72}\pi^2.\end{aligned}$$

f) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}.$

Lösung
Der Integrand ist bis auf den Wurzelterm eine rationale Funktion, welche wir integrieren können. Also sorgen wir mit der Substitution $x = u^2$ dafür, dass die Wurzel

verschwindet. Dann ist zudem $dx = 2u\,du$. Also:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2} = \int \frac{2u\,du}{u^4+u} = \int \frac{2\,du}{u^3+1}.$$

Der Nenner hat bei $u=-1$ eine Nullstelle und mit Polynomdivision erhalten wir

$$u^3+1=(u+1)(u^2-u+1).$$

Der zweite Faktor $u^2-u+1=(u-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$ auf der rechten Seite hat keine reelle Nullstelle, wir führen also die Partialbruchzerlegung durch:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2} &= \int \left(\frac{\frac{2}{3}}{u+1}+\frac{-\frac{2}{3}u+\frac{4}{3}}{u^2-u+1}\right) du \\
&= \frac{2}{3}\int \frac{du}{u+1} - \frac{1}{3}\int \frac{2u-1}{u^2-u+1}\,du + \int \frac{1}{u^2-u+1}\,du \\
&= \frac{2}{3}\log|u+1| - \frac{1}{3}\log|u^2-u+1| + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(u-\tfrac{1}{2})\right)+C \\
&= \frac{2}{3}\log(\sqrt{x}+1) - \frac{1}{3}\log(x-\sqrt{x}+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt{x}-\tfrac{1}{2})\right)+C.
\end{aligned}$$

Die Berechnung des Integrals von $1/(u^2-u+1)$ ist im Skript Teil A, Kap. III, Seiten 30–31 ausgeführt.

7. Berechne mittels Partialbruchzerlegung die folgenden unbestimmten Integrale:

a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^3+x^2-x-1}\,\mathrm{d}x;$

Lösung

Durch Ausprobieren finden wir, dass 1 eine Nullstelle des Nenners ist. Mit Polynomdivision ergibt sich $(x^3+x^2-x-1):(x-1)=x^2+2x+1$, was das Quadrat von $x+1$ ist. Also faktorisieren wir $x^3+x^2-x-1=(x-1)(x+1)^2$. Der Ansatz der Partialbruchzerlegung ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x^3+x^2-x-1} &= \frac{x}{(x-1)(x+1)^2} \overset{!}{=} \frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-1} \\
&= \frac{(A+C)x^2+(B+2C)x+(-A-B+C)}{(x-1)(x+1)^2}.
\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir $A=-\frac{1}{4}$, $B=\frac{1}{2}$ und $C=\frac{1}{4}$. Somit ist

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{x^3+x^2-x-1}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{4}\log|x+1| + \frac{1}{4}\log|x-1| - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} \\
&= \frac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}.
\end{aligned}$$

b) $\displaystyle\int \frac{2x^3+5x^2+4x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$;

Hinweis: Das Polynom x^2+1 ist ein Faktor des Nenners.

Lösung

Da x^2+1 das Nennerpolynom teilt, erhalten wir durch Polynomdivision $(x^4+2x^3+3x^2+2x+2):(x^2+1)=(x^2+2x+2)$. Das Polynom x^2+2x+2 hat keine reellen Nullstellen, wir betrachten daher als Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned}\frac{2x^3+5x^2+4x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2} &\overset{!}{=} \frac{Ax+C}{x^2+1}+\frac{Bx+D}{x^2+2x+2}\\ &= \frac{(A+B)x^3+(2A+C+D)x^2+(2A+B+2C)x+2C+D}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}.\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert $A=2$, $B=C=0$ und $D=1$. Also

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3+5x^2+4x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x+\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x\\ &= \log|x^2+1|+\int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \log(x^2+1)+\arctan(x+1).\end{aligned}$$

c) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^4+2x^2}\,\mathrm{d}x$.

Lösung

Zunächst gilt $x^4+2x^2=x^2(x^2+2)$, und x^2+2 hat keine reellen Nullstellen. Wir setzen also

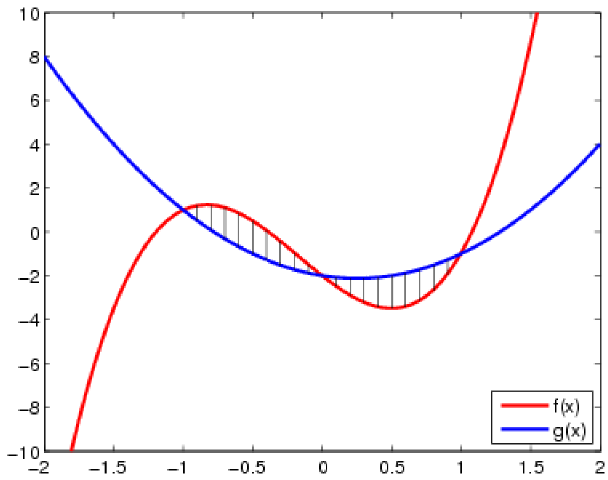
$$\begin{aligned}\frac{x+2}{x^2(x^2+2)} &\overset{!}{=} \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2}\\ &= \frac{(A+C)x^3+(B+D)x^2+2Ax+2B}{x^2(x^2+2)},\end{aligned}$$

woraus folgt: $A=\frac{1}{2}$, $B=1$, $C=-\frac{1}{2}$ und $D=-1$. Somit

$$\begin{aligned}\int \frac{x+2}{x^2(x^2+2)}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x+\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int \frac{x+2}{x^2+2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\log|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+2}\,\mathrm{d}x-\int \frac{1}{x^2+2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\log|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+2}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\log|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\log(x^2+2)-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

8. Betrachte die Graphen der beiden Funktionen

$$f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 5x - 2 \qquad \text{und} \qquad g(x) = 2x^2 - x - 2.$$



a) Bestimme die Stellen $x_1 < x_2 < x_3$, an denen sich die Graphen der beiden Funktionen schneiden.

Lösung

Um die Schnittpunkte der beiden Graphen zu bestimmen, müssen wir die Gleichung $f(x) = g(x)$ lösen:

$$\begin{aligned} & 4x^3 + 2x^2 - 5x - 2 = 2x^2 - x - 2 \\ \Longleftrightarrow \quad & 4x^3 - 4x = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & x(x^2 - 1) = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & x(x-1)(x+1) = 0. \end{aligned}$$

Die gesuchten Stellen lauten also $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 1$.

b) Berechne das Integral $\displaystyle\int_{x_1}^{x_3} \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x$.

Lösung

$$\int_{x_1}^{x_3} f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} 4x^3 - 4x\,\mathrm{d}x = \left[x^4 - 2x^2\right]_{-1}^{1} = -1 - (-1) = 0.$$

Interpretation des Ergebnisses: Die beiden schraffierten Flächen (siehe Skizze) sind gleich gross. Im Gegensatz zur linken Fläche steuert die rechte allerdings einen *negativen* Wert zum Integral bei, da der Graph von f zwischen x_2 und x_3 unterhalb des Graphen von g verläuft. Das gesamte Integral ist deswegen gleich Null.

c) Berechne den Inhalt der schraffierten Fläche.

Lösung
Der Inhalt der schraffierten Fläche ist gegeben durch

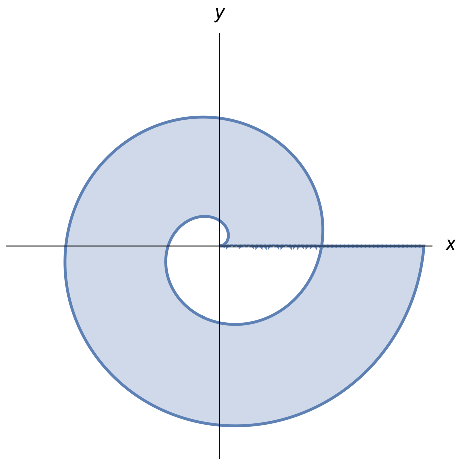
$$\int_{x_1}^{x_3} |f(x) - g(x)| \,\mathrm{d}x.$$

Wichtig sind hierbei die Betragsstriche. Da der Graph von f zwischen x_1 und x_2 oberhalb des Graphen von g verläuft, zwischen x_2 und x_3 jedoch unterhalb, können wir die Betragsstriche durch eine Zerlegung des Integrationsintervalls auflösen:

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_3} |f(x) - g(x)| \,\mathrm{d}x &= \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)| \,\mathrm{d}x + \int_{x_2}^{x_3} |f(x) - g(x)| \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(x) - g(x) \,\mathrm{d}x + \int_{x_2}^{x_3} g(x) - f(x) \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{0} 4x^3 - 4x \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} 4x - 4x^3 \,\mathrm{d}x \\ &= \left[x^4 - 2x^2\right]_{-1}^{0} + \left[2x^2 - x^4\right]_{0}^{1} = 0 - (-1) + 1 - 0 = 2.\end{aligned}$$

Der Inhalt der schraffierten Fläche beträgt also 2.

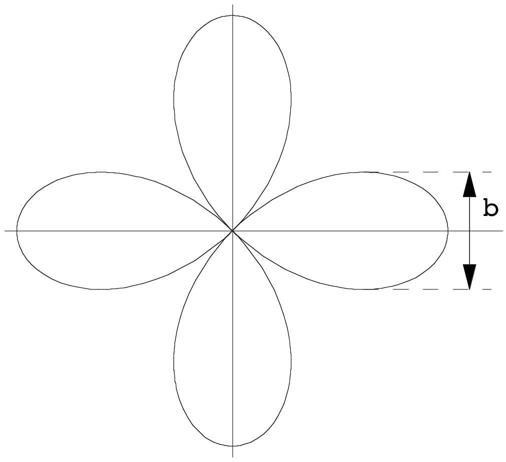
9. Es sei die Spirale $\varrho = \varphi$ in Polarkoordinaten gegeben. Man berechne den Inhalt des schattierten Flächenstückes, das eingeschlossen wird von der x-Achse und den Stücken der Kurve mit $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $\varphi \in [2\pi, 4\pi]$.



Lösung
Die schraffierte Fläche ist die Sektorfläche der Spirale zwischen 2π und 4π abzüglich der Sektorfläche zwischen 0 und 2π. Wir rechnen in Polarkoordinaten ϱ, φ und erhalten damit die Formel

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{4\pi} \varrho(\varphi)^2 \,d\varphi - \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} \varrho(\varphi)^2 \,d\varphi = \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{4\pi} \varphi^2 \,d\varphi - \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} \varphi^2 \,d\varphi \\ &= \frac{1}{6}\left(\left[\varphi^3\right]_{2\pi}^{4\pi} - \left[\varphi^3\right]_{0}^{2\pi}\right) = \frac{\pi^3}{6} \cdot (64 - 8 - 8 + 0) = 8\pi^3.\end{aligned}$$

10. Prüfungsaufgabe Frühjahr 2005:
Durch
$$\varrho = a\,|\cos(2\varphi)|$$
mit $a > 0$ wird in Polarkoordinaten der Rand eines Kleeblattes parametrisiert.



a) Berechne den Flächeninhalt des Kleeblattes.
Lösung
Für die Fläche erhalten wir nach der bekannten Formel für die Sektorfläche
$$A = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \varrho(\varphi)^2\,d\varphi = \frac{1}{2}a^2\int\limits_0^{2\pi}\cos^2(2\varphi)\,d\varphi = \frac{a^2}{4}\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos(4\varphi))\,d\varphi$$
$$= \frac{a^2}{4}\left[\varphi + \frac{1}{4}\sin(4\varphi)\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi a^2}{2}.$$
Dabei haben wir die Beziehung $\cos^2(\varphi) = \frac{1}{2}(1+\cos(2\varphi))$ verwendet.

b) Bestimme die Breite b des Kleeblattes.
Lösung
Um die Breite zu bestimmen, benötigen wir die y-Koordinate desjenigen Punktes im ersten Quadranten, an dem die Tangente an der Kurve horizontal ist (d. h. wo die y-Koordinate ein lokales Maximum hat). Dazu bestimmen wir zunächst die kartesischen Komponenten der Kurve:
$$\begin{aligned}(x(\varphi), y(\varphi)) &= (\varrho(\varphi)\cos\varphi, \varrho(\varphi)\sin\varphi)\\ &= (a\cos(\varphi)|\cos(2\varphi)|, a\sin\varphi|\cos(2\varphi)|)\,.\end{aligned}$$
Aus der Skizze ist klar, dass wir einen Punkt mit $\varphi \in (0, \frac{\pi}{4})$ suchen. Dort ist $\cos(2\varphi) > 0$, und wir finden mit den beiden Identitäten $\cos(2\varphi) = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$ und $\sin(2\varphi) = 2\sin\varphi\cos\varphi$
$$\begin{aligned}0 &\overset{!}{=} \frac{d}{d\varphi}y(\varphi) = \frac{d}{d\varphi}(a\sin\varphi\cos(2\varphi)) = a\cos\varphi\cos(2\varphi) - 2a\sin\varphi\sin(2\varphi)\\ &= a\left[\cos\varphi(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) - 4\sin^2\varphi\cos\varphi\right] = a\cos\varphi\left(\cos^2\varphi - 5\sin^2\varphi\right)\\ &= a\cos\varphi\left(1 - 6\sin^2\varphi\right).\end{aligned}$$

Für $\varphi \in (0, \frac{\pi}{4})$ ist $\cos\varphi > 0$, also suchen wir Lösungen der Gleichung $6\sin^2\varphi = 1$. Die einzige Lösung davon ist

$$\varphi_0 = \arcsin\frac{1}{\sqrt{6}},$$

da auch $\sin\varphi > 0$ gilt im untersuchten Bereich. Für die Breite ergibt sich nun

$$\begin{aligned} b &= 2y(\varphi_0) = 2a\sin\varphi_0\cos(2\varphi_0) = 2a\sin\varphi_0(1 - 2\sin^2\varphi_0) = \frac{2a}{\sqrt{6}}\left(1 - \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{4a}{3\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

Abgabe der schriftlichen Aufgaben am Mittwoch, 02. Dezember 2015 in den Schnellübungen. Die Multiple-Choice-Aufgaben sind online einzureichen.