D-MAVT, D-MATL
Prof. Dr. Urs Lang

Analysis I
HS 15

Schnellübung 7

1. Berechne alle ersten partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f(x,y) = x$;
Lösung
$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 1, \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 0.$

b) $f(x,y) = e^{xy}$;
Lösung
$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = ye^{xy}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = xe^{xy}.$

c) $f(x,y) = x^y$;
Lösung
$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = yx^{y-1}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} e^{y\log x} = (\log x)e^{y\log x} = x^y \log x.$

d) $f(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$;
Lösung
$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{(x^2+y^2)-(x-y)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2+2xy}{(x^2+y^2)^2},$

$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{-(x^2+y^2)-(x-y)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$

e) $f(x,y) = x^2 y \sin(xy)$.
Lösung
$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 2xy\sin(xy) + x^2y^2\cos(xy),$

$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = x^2\sin(xy) + x^3 y\cos(xy).$

2. Bestimme die Richtungsableitung der Funktion f an der Stelle P in Richtung v in den folgenden Beispielen.
Hinweis: Normiere die Vektoren v zuerst.

a) $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2$, $P = (3,3)$, $v = (-1,-3)^T$;
Lösung
Zunächst normieren wir den Vektor v zu $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1,-3)^T$. Wir definieren die Kurve $\vec{r}(t) := P + t\vec{e} = (3,3) + t \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}(-1,-3)$ und setzen ein:

$$\begin{aligned} f(\vec{r}(t)) &= f\left(3 - \frac{t}{\sqrt{10}}, 3 - \frac{3}{\sqrt{10}}t\right) = 2\cdot\left(3 - \frac{t}{\sqrt{10}}\right)^2 + 2\cdot\left(3 - \frac{3}{\sqrt{10}}t\right)^2 \\ &= 2\cdot\left(9 - \frac{6t}{\sqrt{10}} + \frac{t^2}{10}\right) + 2\cdot\left(9 - \frac{18t}{\sqrt{10}} + \frac{9t^2}{10}\right) = 36 - \frac{48t}{\sqrt{10}} + 2t^2. \end{aligned}$$

Diese Funktion leiten wir ab und erhalten so die Richtungsableitung

$$D_{\vec{e}} f(3,3) = \frac{df}{dt}(0) = -\frac{48}{\sqrt{10}}.$$

Einfacher geht es mit dem Satz aus der Vorlesung, es gilt

$$D_{\vec{e}} f(x,y) = \vec{e} \cdot \mathbf{grad}\, f(x,y).$$

Es ist nämlich $\mathbf{grad}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \end{pmatrix}$, also

$$D_{\vec{e}} f(P) = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}}{\sqrt{10}} \cdot \mathbf{grad}\, f(3,3) = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} = -\frac{48}{\sqrt{10}}.$$

b) $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$, $P = (3,0)$, $v = (1,-1)^T$;
Lösung
Es gilt $\mathbf{grad}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{x^2+y^2} \\ \frac{2y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$ und $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, folglich

$$D_{\vec{e}} f(P) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2}} \cdot \mathbf{grad}\, f(3,0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

c) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $P = (3,0)$, $v = (1,1)^T$.
Lösung
$\mathbf{grad}\, f(x,y) = -(x^2+y^2)^{-3/2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, also

$$\begin{aligned} D_{\vec{e}} f(P) &= \mathbf{grad}\, f(3,0) \cdot \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{27} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{3}{\sqrt{2} \cdot 27} = -\frac{\sqrt{2}}{18}. \end{aligned}$$

(Beim Skalarprodukt kommt es nicht auf die Reihenfolge an, es gilt $\vec{e} \cdot \mathbf{grad}\, f(x,y) = \mathbf{grad}\, f(x,y) \cdot \vec{e}$.)

3. Überprüfe die Integrabilitätsbedingung für die folgenden Funktionen $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$. Finde, falls möglich, eine Funktion $f(x,y)$ (mit einem achsenparallelen Rechteck als Definitionsbereich) mit $f_x = \varphi$ und $f_y = \psi$.

a) $\varphi(x,y) = \frac{1}{y}$, $\psi(x,y) = -\frac{x}{y^2}$;
Lösung
Die Funktionen ψ und φ sind auf $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$ stetig differenzierbar, also auch in einem achsenparallelen Rechteck in diesem Bereich. Es gilt

$$\varphi_y = -\frac{1}{y^2} \quad \text{und} \quad \psi_x = -\frac{1}{y^2},$$

die Funktionen φ, ψ erfüllen also die Integrabilitätsbedingung. Wir suchen jetzt nach der Funktion f.

Nehmen wir an, dass $f(x,y)$ eine Funktion von zwei Variablen ist (definiert auf dem achsenparallelen Rechteck), mit $f_x = \varphi$ und $f_y = \psi$. Wir integrieren zuerst die Gleichung $f_x = \varphi$ nach x und erhalten

$$f(x,y) = \frac{x}{y} + u(y),$$

wobei u eine Funktion von y ist, die nicht von x abhängt. Wir leiten das nun nach y ab und benutzen $f_y = \psi$, also gilt

$$f_y(x,y) = -\frac{x}{y^2} + u'(y) \overset{!}{=} \psi(x,y) = -\frac{x}{y^2};$$

Somit muss $u'(y) = 0$ sein, d. h. $u(y) = C$ für eine Konstante C. Dann ist f durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$f(x,y) = \frac{x}{y} + C.$$

Nachrechnen ergibt tatsächlich die Gleichungen $f_x = \varphi$ und $f_y = \psi$.

b) $\varphi(x,y) = e^x \cos y$, $\psi(x,y) = e^x \sin y$;

Lösung

Die Funktionen φ und ψ sind überall stetig differenzierbar, also auch in einem achsenparallelen Rechteck. Es sind

$$\varphi_y(x,y) = -e^x \sin y \quad \text{und} \quad \psi_x(x,y) = e^x \sin y.$$

Die Funktion g erfüllt also nicht die Integrabilitätsbedingung, nach dem Satz von Schwarz existiert keine Funktion f mit $f_x = \varphi$ und $f_y = \psi$.

c) $\varphi(x,y) = x \arctan y$, $\psi(x,y) = \dfrac{x^2}{2(1+y^2)} + \log y$;

Lösung

Die Funktionen ψ und φ sind auf $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y > 0\}$ stetig differenzierbar, also auch in einem achsenparallelen Rechteck in diesem Bereich. Es sind

$$\varphi_y(x,y) = \frac{x}{1+y^2} \quad \text{und} \quad \psi_x(x,y) = \frac{x}{1+y^2}.$$

Die Funktionen φ, ψ erfüllen also die Integrabilitätsbedingung. Wir suchen jetzt nach der Funktion f.

Nehmen wir an, dass $f(x,y)$ eine Funktion von zwei Variablen ist (definiert auf dem achsenparallelen Rechteck), sodass $f_x = \varphi$ und $f_y = \psi$. Wir integrieren die Gleichung $f_x = \varphi$ nach x und erhalten

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} \arctan y + u(y),$$

wobei u eine Funktion von y ist, die nicht von x abhängt. Wir leiten das nun nach y ab und benutzen $f_y = \psi$, also gilt

$$f_y(x,y) = \frac{x^2}{2(1+y^2)} + u'(y) \stackrel{!}{=} \frac{x^2}{2(1+y^2)} + \log y.$$

Somit muss u eine Stammfunktion von log sein; also $u(y) = y \log y - y + C$, für eine Konstante C. Dann ist f durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} \arctan y + y \log y - y + C.$$

d) $\varphi(x,y) = \dfrac{2+2y}{x^2+y^2}$, $\psi(x,y) = -\dfrac{2x-y}{x^2+y^2}$.

Lösung

Es ist

$$\begin{aligned} \varphi_y &= \frac{2(x^2+y^2) - (2+2y)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2 - 4y - 2y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{und} \\ \psi_x &= -\frac{2(x^2+y^2) - (2x-y)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2 - 2xy - 2y^2}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

Diese beiden Funktionen sind nicht gleich, also ist die Integrabilitätsbedingung nicht erfüllt. Es gibt keine Funktion f mit $f_x = \varphi$ und $f_y = \psi$.

4. a) Bestimme die (Gleichung der) Tangentialebene an das Paraboloid $z = x^2 + y^2$ im Punkt (1,2,5).

Lösung

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto x^2 + y^2$. Die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen von f über dem Punkt (x_0, y_0) ist:

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\,(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)\,(y - y_0).$$

Es ist

$$f_x(x,y) = 2x\,, \quad f_y(x,y) = 2y \qquad \Longrightarrow \qquad f_x(1,2) = 2\,, \quad f_y(1,2) = 4.$$

Die gesuchte Tangentialebene hat also die Gleichung

$$z = 5 + 2(x-1) + 4(y-2) \quad \text{oder} \quad 2x + 4y - z = 5.$$

b) Bestimme alle Tangentialebenen an das elliptische Paraboloid $z = 2x^2 + \dfrac{y^2}{4}$, welche parallel zur Ebene $E : x + y + z = 1$ sind.

Lösung

Wir nutzen aus, dass zwei Ebenen genau dann parallel sind, wenn ihre Normalenvektoren parallel sind.

Setzen wir

$$f(x,y) := 2x^2 + \frac{y^2}{4},$$

so hat die Tangentialebene an den Graphen von f (das ist das gegebene Paraboloid) über dem Punkt (x_0, y_0) die Gleichung

$$\begin{aligned} z &= 2x_0^2 + \frac{y_0^2}{4} + 4x_0(x - x_0) + \frac{y_0}{2}(y - y_0) \\ &= -2x_0^2 - \frac{y_0^2}{4} + 4x_0 \cdot x + \frac{y_0}{2} \cdot y. \end{aligned}$$

Der Normalenvektor einer solchen Tangentialebene ist damit $(4x_0, \frac{1}{2}y_0, -1)$ und dieser muss parallel zum Normalenvektor $(1, 1, 1)$ der Ebene E sein. Es gibt folglich eine reelle Zahl λ mit

$$(4x_0, \tfrac{1}{2}y_0, -1) = \lambda \cdot (1, 1, 1).$$

Es folgt, dass

$$\lambda = -1 \text{ und deshalb } x_0 = \frac{\lambda}{4} = -\frac{1}{4}, \quad y_0 = 2\lambda = -2.$$

Einsetzen in die Gleichung der Tangentialebene führt zu

$$\begin{aligned} & z = 2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{4}{4} + 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{1}{4}\right) + \frac{-2}{2}(y + 2), \\ \text{also} \quad & z = \frac{1}{8} + 1 - \left(x + \frac{1}{4}\right) - y - 2, \\ \text{d. h.} \quad & z = -x - y - \frac{9}{8} \qquad \text{oder} \quad x + y + z = -\frac{9}{8}. \end{aligned}$$

Also ist nur die Tangentialebene $x + y + z = -\frac{9}{8}$ parallel zur Ebene $x + y + z = 1$.