Serie 8

1. Es seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $|z_1| < 1$ und $|z_2| < 1$, so gilt für den Betrag der Summe

i) ✗ $|z_1 + z_2| < 1$.
ii) ✗ $|z_1 + z_2| > 1$.
iii) ✗ $|z_1 + z_2| = 1$.
iv) ✓ Alle drei obigen Fälle kommen vor.

Lösung
Es kommen alle drei Fälle vor. Zum Beispiel gilt

$$
\begin{aligned}
&|\tfrac{i}{4} + \tfrac{i}{4}| = \tfrac{1}{2} < 1,\\
&|\tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{4}| = \tfrac{3}{2} > 1,\\
&|\tfrac{i}{2} + \tfrac{i}{2}| = 1.
\end{aligned}
$$

2. Welche der folgenden Inklusionen ist wahr?

i) ✓ $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z \cdot i) > \mathrm{Re}(z)\} \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) < -\mathrm{Im}(z)\}$
ii) ✗ $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z \cdot i) > \mathrm{Im}(z)\} \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > \mathrm{Re}(z)\}$
iii) ✗ $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \cdot \mathrm{Im}(z) > 0\} \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) > 0\}$
iv) ✗ $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z) > 0\} \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(-z) - \mathrm{Im}(-z) > 0\}$

- **Lösung**
  Option 1 ist richtig. Für eine beliebige komplexe Zahl $z = a + ib$ gilt

  $$\mathrm{Re}(z \cdot i) = \mathrm{Re}((a + ib) \cdot i) = \mathrm{Re}(ai - b) = -b = -\mathrm{Im}(z).$$

  Diese beiden Mengen sind deswegen identisch.
- **Lösung**
  Option 2 ist falsch. Für eine beliebige komplexe Zahl $z = a + ib$ gilt

  $$\mathrm{Im}(z \cdot i) = \mathrm{Im}((a + ib) \cdot i) = \mathrm{Im}(ai - b) = a = \mathrm{Re}(z).$$

  Folglich sind die beiden Mengen disjunkt (d. h. sie haben kein Element gemeinsam). Zum Beispiel liegt $z = 1$ in der linken Menge, jedoch nicht in der rechten.
- **Lösung**
  Option 3 ist falsch. Zum Beispiel liegt $z = -1 - i$ in der linken Menge, jedoch nicht in der rechten.

- **Lösung**
  Option 4 ist falsch. Es gilt $\mathrm{Re}(-z) = -\mathrm{Re}(z)$, und analog für $\mathrm{Im}(-z)$, also sind die beiden Mengen disjunkt. Zum Beispiel liegt $z = 1$ in der linken Menge, jedoch nicht in der rechten.

3. Es seien $z, w \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen mit $z^4 = 1$ und $w^3 + i = 0$. Welche der folgenden Zahlen ist ein möglicher Wert der Summe $z + w$?

i) ✓ 0

ii) ✗ $-\frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

iii) ✗ 1

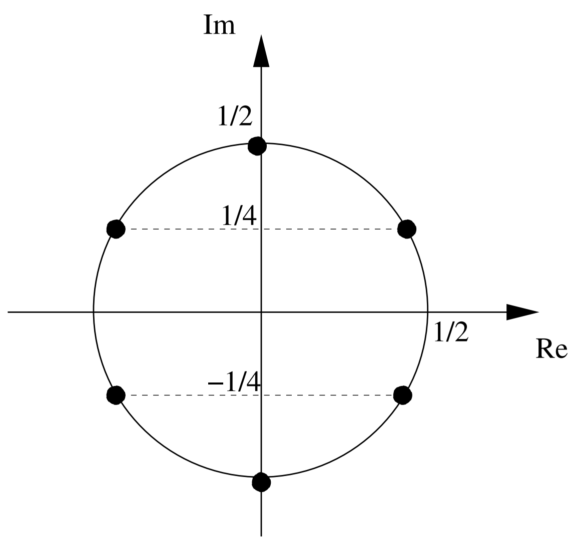
iv) ✗ $\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

Lösung
Die Lösungen von $z^4 = 1$ sind $\{\pm 1, \pm i\}$. Um die Lösungen von $w^3 = -i$ zu finden, schreibe $-i = e^{i\frac{3}{2}\pi}$. Also gilt

$$\begin{aligned}\{w \in \mathbb{C} \mid w^3 = -i\} &= \{e^{i(\frac{1}{2}\pi + k\frac{2\pi}{3})} \mid k = 0, 1, 2\} = \{e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\frac{7\pi}{6}}, e^{i\frac{11\pi}{6}}\} \\ &= \{i, -\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{i}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{i}{2}\}.\end{aligned}$$

Wir erkennen durch Kombinieren: von der obigen Auswahl ist nur $0 = (-i) + i$ möglich.

4. Die schwarzen Punkte in der unten stehenden Figur entsprechen den Lösungen der Gleichung ...



i) ✗ $z^8 = \frac{1}{256}$.

ii) ✗ $z^6 = \frac{1}{64}$.

iii) ✗ $z^6 = \frac{1}{2}$.

iv) ✓ $z^6 = -\frac{1}{64}$.

- **Lösung**
  Der Kreis hat Radius $\frac{1}{2}$, und es sind sechs Punkte darauf eingezeichnet, die jeweils einen Winkel von $\frac{\pi}{3}$ mit dem Ursprung einschliessen. Es handelt sich also um die sechsten Wurzeln einer komplexen Zahl mit Betrag $(\frac{1}{2})^6 = \frac{1}{64}$.
  Wenn wir den Punkt w_0 im ersten Quadranten (mit Imaginärteil $\frac{1}{4}$) betrachten und dessen Argument versechsfachen, so landen wir auf der negativen reellen Achse. Folglich ist $-\frac{1}{64}$ die sechste Potenz von w_0 – die anderen Punkte entstehen durch Drehung von w_0 um alle Vielfachen von $\frac{2\pi}{6}$.
  Also handelt es sich um die sechsten komplexen Wurzeln von $-\frac{1}{64}$.
- **Lösung**
  Option 1 ist falsch. Diese Gleichung hat 8 verschiedene komplexe Lösungen.
- **Lösung**
  Option 2 ist falsch. Diese Gleichung hat reelle Lösungen, aber in der Skizze liegt kein Punkt auf der reellen Achse.
- **Lösung**
  Option 3 ist falsch, da der Betrag nicht stimmt.
- **Lösung**
  Option 4 ist richtig.

5. Was ist an folgender Rechnung falsch?

$$-1 = i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

i) ✗ Die Quadratwurzel $\sqrt{-1}$ existiert nicht.

ii) ✓ Die komplexe Quadratwurzel ist keine eindeutig definierte Funktion.

iii) ✗ Die Zahl i ist nicht wohldefiniert.

iv) ✗ Man darf im Komplexen nicht die Wurzel ziehen.

v) ✓ Die Potenzgesetze gelten für komplexe Zahlen nicht immer.

- **Lösung**
  Option 1 ist falsch. In den komplexen Zahlen gibt es zwei quadratische Wurzeln z von -1, nämlich i und $-i$, für welche beide $z^2 = -1$ gilt.
- **Lösung**
  Option 2 ist richtig. Die Rechnung setzt voraus, dass die Quadratwurzel eine eindeutig definierte Funktion wäre, für die immer $(\sqrt{z})^2 = \sqrt{z^2}$ gälte.
  Wir müssen uns aber bei allen Wurzeln entscheiden, welche wir wählen: bei $\sqrt{-1}$ gibt es i und $-i$, bei $\sqrt{1}$ gibt es auch $+1$ und -1. Bei den reellen Zahlen haben wir damit keine Probleme, da dort die Wurzelfunktion (die immer die positive Wurzel wählt) verträglich ist mit der Multiplikation. Im Komplexen gibt es keine offensichtliche Methode, immer eine „richtige“ Wurzel zu wählen.

- **Lösung**
  Option 3 ist falsch. Die Zahl i ist eine (ein für allemal) festgewählte Lösung der Gleichung $z^2 + 1 = 0$.
- **Lösung**
  Option 4 ist falsch. Man darf im Komplexen stets die Wurzel ziehen, wenn man weiss, *welche*; aber es gelten dafür nicht mehr alle Potenzgesetze.
- **Lösung**
  Option 5 ist richtig. Es gilt im Komplexen beispielsweise *nicht* für beliebige a, b, dass $a^n \cdot b^n = (ab)^n$ (nicht einmal für reelles n), wie wir mit $n = \frac{1}{2}$ und $a = b = -1$ eben gesehen haben. Die komplexen Potenzfunktionen sind für (nicht ganzzahlige) Potenzen nicht überall eindeutig definiert.

6. a) Schreibe die folgenden komplexen Zahlen in Normalform $x + iy$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$:

(i) $\dfrac{1}{1 + \frac{2}{i+7}}$;

(ii) $e^{e^{-i\pi/3}}$;

(iii) $(-\pi - i\pi)^3$.

Lösung

(i)

$$\frac{1}{1 + \frac{2}{i+7}} = \frac{7+i}{9+i} = \frac{(7+i)(9-i)}{(9+i)(9-i)} = \frac{64+2i}{82} = \frac{32}{41} + i\frac{1}{41}.$$

(ii)

$$e^{e^{-\frac{i\pi}{3}}} = e^{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} = e^{\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{e}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - i\sqrt{e}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

(iii) Direkt:

$$\begin{aligned}(-\pi - i\pi)^3 &= (-\pi - i\pi)(-\pi - i\pi)^2 = (-\pi - i\pi)(\pi^2 + i2\pi^2 - \pi^2) \\ &= (-\pi - i\pi)i2\pi^2 = 2\pi^3 - i2\pi^3.\end{aligned}$$

Mit Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned}(-\pi - i\pi)^3 &= (-\pi(1+i))^3 = (-\pi \cdot \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^3 = -2^{\frac{3}{2}}\pi^3 e^{i\frac{3\pi}{4}} \\ &= -2^{\frac{3}{2}}\pi^3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\pi^3 - i2\pi^3.\end{aligned}$$

b) Schreibe die folgenden komplexen Zahlen in Polarform $re^{i\varphi}$, wobei $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$:

(i) $1 - i\sqrt{3}$;

(ii) $e^{i\pi} + 2e^{i\frac{\pi}{2}}$;

(iii) $\dfrac{2+2i}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$.

Lösung

(i) Zunächst ist $r^2 = \left|1 - i\sqrt{3}\right|^2 = 1 + \sqrt{3}^2 = 4$, also $r = 2$. Damit folgt

$$1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2e^{\frac{5\pi}{3}i}.$$

(ii) Es ist $z := e^{i\pi} + 2e^{i\frac{\pi}{2}} = -1 + 2i$ und $r^2 = |z|^2 = |-1+2i|^2 = 1 + 2^2 = 5$, also $r = \sqrt{5}$. Ferner folgern wir aus $\tan\varphi = \frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)} = \frac{2}{-1} = -2$, dass $\varphi = \arctan(-2) + k\pi = -\arctan 2 + k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ sein muss. Wegen $-\arctan 2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ und der Forderung $\varphi \in [0, 2\pi)$ muss entweder $k = 1$ oder $k = 2$ sein. Da $\sin\varphi = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} = \frac{2}{\sqrt{5}} > 0$ sein muss, müssen wir $k = 1$ wählen. Also ist

$$z = \sqrt{5}e^{i(-\arctan 2 + \pi)} = \sqrt{5}e^{i(\pi - \arctan 2)}.$$

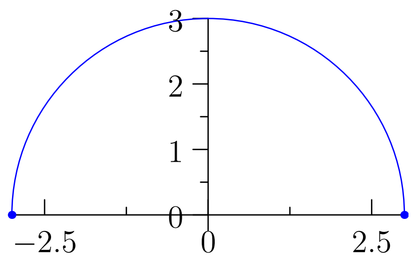
(iii)

$$\begin{aligned}\frac{2+2i}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} &= 2\sqrt{2}\frac{\frac{1+i}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} = 2\sqrt{2}\frac{e^{i\pi/4}}{e^{i5\pi/3}} = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{3}\right)} \\ &= 2\sqrt{2}e^{-i\frac{17\pi}{12}} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}.\end{aligned}$$

7. Skizziere die folgenden Bereiche der komplexen Ebene!

a) $\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| = 3, \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$

- **Lösung**
  Die Elemente mit Betrag 3 liegen auf einem Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius 3.
- **Lösung**
  Die Elemente mit $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ liegen auf der oberen Halbebene.
- **Lösung**
  Beachte, dass die Randpunkte -3 und 3 Teil der Menge sind.



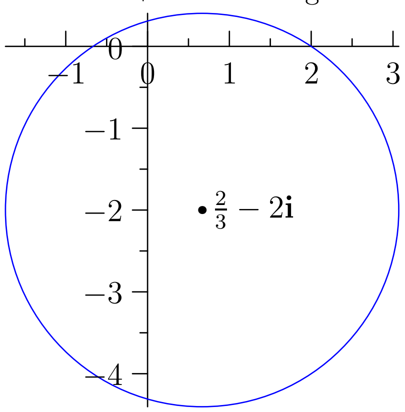
b) $\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, \frac{|z+2-2i|}{|z+i|} = 2\}$

- **Lösung**
  Gesucht sind alle komplexen Zahlen, die von $-2 + 2i$ genau doppelt so weit weg sind wie von $-i$.

- **Lösung**
  Wir schreiben $z = x + iy$ und rechnen

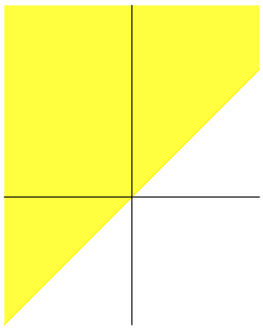
$$\begin{aligned} & \frac{|x+iy+2-2i|}{|x+iy+i|} = 2 \\ \iff & |x+iy+2-2i|^2 = 4|x+iy+i|^2 \\ \iff & (x+2)^2 + (y-2)^2 = 4x^2 + 4(y+1)^2 \\ \iff & 3x^2 - 4x + 3y^2 + 12y - 4 = 0 \\ \iff & x^2 - \frac{4}{3}x + y^2 + 4y - \frac{4}{3} = 0 \\ \iff & \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} + (y+2)^2 - 4 - \frac{4}{3} = 0 \\ \iff & \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + (y+2)^2 = \frac{52}{9}. \end{aligned}$$

  Im zweitletzten Schritt haben wir dabei quadratisch ergänzt.
- **Lösung**
  Das Ergebnis ist ein Kreis mit Mittelpunkt $\frac{2}{3} - 2i$ und Radius $\frac{2\sqrt{13}}{3}$. Es ist ein sogenannter **Kreis des Apollonius**: Die Menge aller Punkte, für welche das Verhältnis der Abstände von $-2+2i$ bzw. $-i$ gleich 2 ist.



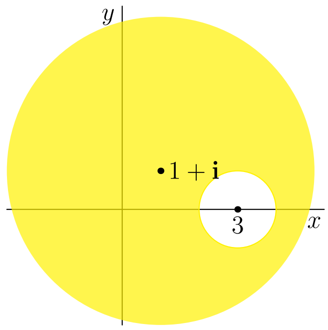
c) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) \geq \mathrm{Re}(z)\}$

- **Lösung**
  Die Gleichung $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(z)$ beschreibt die Punkte auf der ersten Winkelhalbierenden.
- **Lösung**
  Die gesuchte Menge ist die Vereinigung dieser Geraden und des Bereiches oberhalb davon.



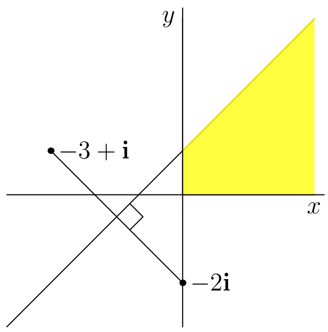
d) $\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z-3| \geq 1, |z-1-i| < 4\}$

- **Lösung**
  Die Menge $\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z-3| \geq 1\}$ besteht aus allen Zahlen ausserhalb der Kreisscheibe mit Mittelpunkt 3 und Radius 1.
- **Lösung**
  Die Menge $\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z-1-i| < 4\}$ ist die offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt $1+i$ und Radius 4.
- **Lösung**
  Gesucht ist die Schnittmenge. Beachte, dass der Rand des kleinen Kreises Teil der gesuchten Menge ist, jener des grossen jedoch nicht.



e) $\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z-i+3| \geq |z+2i|, \mathrm{Re}(z) > 0, \mathrm{Im}(z) > 0\}$

- **Lösung**
  Gesucht sind die Punkte im ersten Quadranten, die näher bei $-2i$ sind als bei $-3+i$.
- **Lösung**
  Die komplexen Zahlen, die von $-2i$ gleich weit entfernt sind wie von $-3+i$, sind genau jene auf der Mittelsenkrechten der Strecke von $-2i$ nach $-3+i$. Diese Mittelsenkrechte teilt die komplexe Ebene in zwei Halbebenen. Die komplexen Zahlen, die zu $-2i$ näher sind als zu $-3+i$, ist die Halbebene, die $-2i$ enthält.
- **Lösung**
  Dabei sind die Koordinatenachsen zur gesuchten Menge disjunkt. Der Teil der Mittelsenkrechten der Strecke von $-2i$ nach $-3+i$, der ganz im ersten Quadranten liegt, ist jedoch Teil der gesuchten Menge.



8. Es sei das Gebiet

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \,\middle|\, \operatorname{Im}\left(\frac{z+2}{iz}\right) > 0 \right\}$$

gegeben.

a) Skizziere das Gebiet B in der komplexen Ebene.

Lösung

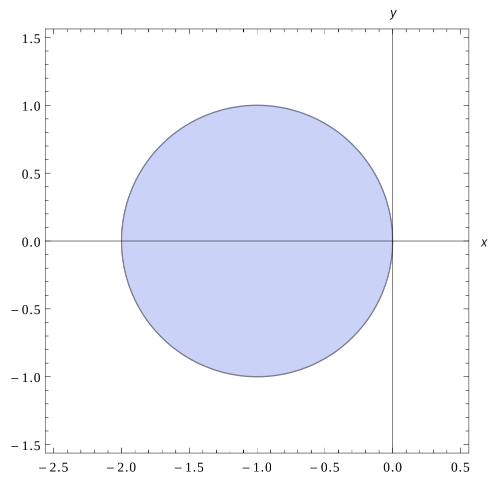
Für $z = x + iy$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{z+2}{iz} &= \frac{x+iy+2}{i(x+iy)} = \frac{x+iy+2}{ix-y} = \frac{(-ix-y)(x+iy+2)}{(-ix-y)(ix-y)} \\
&= \frac{-ix^2+xy-2ix-xy-iy^2-2y}{x^2+y^2} \\
&= \frac{-2y}{x^2+y^2} + \frac{-2x-x^2-y^2}{x^2+y^2} i.
\end{aligned}$$

Da $x^2 + y^2 = |z|^2 > 0$ für $z \neq 0$, gilt

$$\begin{aligned}
z \in B &\iff \operatorname{Im}\left(\frac{z+2}{iz}\right) > 0 \\
&\iff \frac{-2x-x^2-y^2}{x^2+y^2} > 0 \\
&\iff -2x-x^2-y^2 > 0 \\
&\iff 0 > x^2+2x+y^2 \\
&\iff 0 > (x+1)^2-1+y^2 \\
&\iff 1 > (x+1)^2+y^2 \\
&\iff 1 > |z+1|^2.
\end{aligned}$$

Das Gebiet B ist also das Innere des Kreises mit Mittelpunkt -1 und Radius 1. Der Kreisrand gehört nicht zur Menge.



b) Das Polynom $z^3 + \frac{7}{2}z^2 + 7z + 6$ hat eine komplexe Nullstelle mit Realteil gleich -1. Bestimme alle Nullstellen dieses Polynoms in Normal- und in Polarform.

Lösung

Wir bemerken zuerst, dass -1 keine Nullstelle des Polynoms ist und folglich die Nullstelle mit Realteil -1 nicht reell ist. Da solche Nullstellen für Polynome mit reellen Koeffizienten immer in komplex konjugierten Paaren auftreten, hat das Polynom zwei Nullstellen der Form

$$z_{1,2} = -1 \pm iy.$$

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra müssen wir vom Polynom einen Faktor der Form

$$(z + 1 + iy)(z + 1 - iy) = z^2 + 2z + 1 + y^2$$

abspalten können. Polynomdivision ergibt

$$\begin{array}{llllll}
(z^3 & +\frac{7}{2}z^2 & +7z & +6 &): & (z^2 + 2z + 1 + y^2) = z + \frac{3}{2} \\
-(z^3 & +2z^2 & +(1+y^2)z & &) & \\
\hline
 & \frac{3}{2}z^2 & +(6-y^2)z & +6 & & \\
-(& \frac{3}{2}z^2 & +3z & +\frac{3}{2}(1+y^2) &) & \\
\hline
 & & (3-y^2)z & +(\frac{9}{2} - \frac{3}{2}y^2) & &
\end{array}$$

Es bleibt der Rest

$$(3 - y^2)z + \frac{9}{2} - \frac{3y^2}{2}$$

übrig, welcher gleich 0 sein muss; damit ergibt sich $y = \pm\sqrt{3}$. Die dritte Nullstelle ergibt sich durch Nullsetzen des ausgerechneten Faktors $z + \frac{3}{2}$. In Normalform lauten die drei Nullstellen also

$$z_1 = -1 + i\sqrt{3}, \quad z_2 = -1 - i\sqrt{3}, \quad z_3 = -\frac{3}{2}.$$

In Polarform lauten diese somit

$$z_1 = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}, \quad z_2 = 2e^{\frac{-2\pi}{3}i}, \quad z_3 = \tfrac{3}{2}e^{\pi i}.$$

c) Welche dieser Nullstellen befinden sich in B?
Lösung
In Teilaufgabe **a)** haben wir gesehen, dass alle Punkte $z = x + iy$ in B die Ungleichung

$$1 > (x+1)^2 + y^2$$

erfüllen müssen. Es folgt $z_1 \notin B$, $z_2 \notin B$, $z_3 \in B$.

9. Finde in der komplexen Ebene alle Lösungen der folgenden Gleichungen und gib diese in Normalform und Polarform an.

a) $z^6 = -8$;
Lösung
Die Gleichung lässt sich als $z^6 = (\sqrt{2})^6 e^{i\pi}$ darstellen, also sind die Lösungen in Polarform

$$z_k = \sqrt{2}e^{\left(\frac{\pi}{6}+k\cdot\frac{2\pi}{6}\right)i}, \quad k = 0, \ldots, 5;$$

also $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{6}i}$, $\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{6}i}$, $\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{6}i}$, $\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{6}i}$, $\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{6}i}$, $\sqrt{2}e^{\frac{11\pi}{6}i}$.
In Normalform lauten die Lösungen

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}},\\
z_1 &= i\sqrt{2},\\
z_2 &= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}},\\
z_3 &= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}},\\
z_4 &= -i\sqrt{2},\\
z_5 &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

b) $z^5 - 8(-1 - i\sqrt{3})z = 0$;
Lösung
Wir klammern zuerst aus:

$$z^5 - 8(-1 - i\sqrt{3})z = z(z^4 - 8(-1 - i\sqrt{3})) = 0.$$

Offensichtlich ist also $z = 0$ eine Lösung. Für den anderen Faktor erhalten wir mit der Polardarstellung $z = re^{i\varphi}$ die Gleichung

$$z^4 = r^4 e^{4i\varphi} = 8(-1 - i\sqrt{3}) = 16e^{i\frac{4\pi}{3}}.$$

Die weiteren Lösungen lauten damit in Polarform

$$z_k = 2e^{(\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{4})i}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

In Normalform sind die Lösungen der Gleichung also

$$\begin{aligned}
z_0 &= 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3},\\
z_1 &= 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3} + i,\\
z_2 &= 2e^{i\frac{4\pi}{3}} = -1 - i\sqrt{3},\\
z_3 &= 2e^{i\frac{11\pi}{6}} = \sqrt{3} - i;\\
\text{und } z_4 &= 0.
\end{aligned}$$

c) $3z^3 - 12z^2 + pz + q = 0$, wobei $z_1 = 3 + i$ eine Lösung der Gleichung sein soll und p, q reelle Koeffizienten sind, welche noch bestimmt werden müssen.

Lösung

Da sämtliche Koeffizienten reell sind, muss nach einem Satz aus der Vorlesung neben z_1 auch $z_2 = \overline{z_1}$ eine Nullstelle des Polynoms sein. Damit folgt, dass $(z - z_1)(z - z_2)$ ein Faktor des Polynoms ist. Nach dem Hauptsatz der Algebra gibt es auch noch eine weitere Nullstelle z_3, welche reell sein muss (Nullstellen sind reell oder treten in komplex konjugierten Paaren auf; aber es sind in diesem Fall nur drei). Das ergibt:

$$\begin{array}{rrcl}
& 3z^3 - 12z^2 + pz + q & = & 3(z - (3+i))(z - (3-i))(z - z_3)\\
\Longleftrightarrow & 3z^3 - 12z^2 + pz + q & = & 3(z^2 - 6z + 10)(z - z_3)\\
\Longleftrightarrow & 3z^3 - 12z^2 + pz + q & = & 3z^3 - (18 + 3z_3)z^2 + (30 + 18z_3)z - 30z_3.
\end{array}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir zur Bestimmung der drei Unbekannten p, q, z_3 die Gleichungen:

$$\begin{array}{rclcl}
12 & = & 18 + 3z_3 & \Rightarrow & \underline{z_3 = -2}\\
p & = & 30 + 18z_3 & \Rightarrow & \underline{p = -6}\\
q & = & -30z_3 & \Rightarrow & \underline{q = 60}
\end{array}$$

Zusammengefasst sind die jeweiligen Normal- und Polarformen der Lösungen

$$\begin{aligned}
z_1 &= 3 + i = \sqrt{10}e^{i\arctan(1/3)},\\
z_2 &= 3 - i = \sqrt{10}e^{-i\arctan(1/3)},\\
z_3 &= -2 = 2e^{i\pi}.
\end{aligned}$$

10. Prüfungsaufgabe Winter 2015:

a) Bestimme alle komplexen Nullstellen des Polynoms $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ in Normalform $a + ib$.

Lösung

Zunächst setzen wir $y := x^2$ und erhalten die quadratische Gleichung $y^2+y+1 = 0$. Wir benutzen die Lösungsformel für quadratische Gleichungen und erhalten

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i = e^{\pm \frac{2\pi}{3} i}.$$

Nun ziehen wir davon nochmals die zweite Wurzel und erhalten die vier Nullstellen von $f(x)$:

$$\begin{aligned}
x_1 &= e^{\frac{\pi}{3} i} && = +\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2} i; \\
x_2 &= e^{(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{2}) i} = e^{\frac{4\pi}{3} i} && = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2} i; \\
x_3 &= e^{-\frac{\pi}{3} i} && = +\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2} i; \\
x_4 &= e^{(-\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{2}) i} = e^{\frac{2\pi}{3} i} && = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2} i.
\end{aligned}$$

b) Zerlege $f(x)$ in ein Produkt $f(x) = p(x)\, q(x)$ zweier quadratischer Polynome p, q mit reellen Koeffizienten. Bestimme die Partialbruchzerlegung von $\frac{f'(x)}{f(x)}$, d. h.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{Ax + B}{p(x)} + \frac{Cx + D}{q(x)}, \qquad A, B, C, D \in \mathbb{R}.$$

(Dabei bezeichnet f' die Ableitung von f.)

Lösung

Die Lösungen von $f(x) = 0$ erfüllen $\overline{x_1} = x_3$ und $\overline{x_2} = x_4$, d. h. x_1 und x_3 sind zueinander konjugiert komplexe Nullstellen, ebenso x_2 und x_4. Das bedeutet $x_1 + x_3 = x_1 + \overline{x_1} = 2\mathrm{Re}(x_1) = 1 \in \mathbb{R}$ und $x_1 \cdot x_3 = x_1 \overline{x_1} = |x_1|^2 = 1 \in \mathbb{R}$. Analog gilt $x_2 + x_4 = -1$, $x_2 \cdot x_4 = 1 \in \mathbb{R}$; und deshalb sind

$$\begin{aligned}
p(x) &:= (x - x_1)(x - x_3) = x^2 - (x_1 + x_3)x + x_1 x_3 = x^2 - x + 1 \\
q(x) &:= (x - x_2)(x - x_4) = x^2 - (x_2 + x_4)x + x_2 x_4 = x^2 + x + 1
\end{aligned}$$

reelle Polynome. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra gilt nun

$$\begin{aligned}
f(x) = x^4 + x^2 + 1 &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \\
&= (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) = p(x)\, q(x).
\end{aligned}$$

Die Partialbruchzerlegung lässt sich direkt bestimmen, indem man die rechte Seite der Gleichung in der Aufgabe auf einen Nenner (nämlich $f(x)$) bringt. Allerdings vereinfacht sich die Berechnung etwas, wenn man ausnützt, dass $\frac{f'(x)}{f(x)}$ die *logarith-*

mische Ableitung von f ist:

$$\begin{aligned}
\frac{4x^3+2x}{x^4+x^2+1} &= \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log(f(x)) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log(p(x)\,q(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big\{\log(p(x))+\log(q(x))\Big\} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log(p(x)) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log(q(x)) = \frac{p'(x)}{p(x)} + \frac{q'(x)}{q(x)} \\
&= \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{2x+1}{x^2+x+1}.
\end{aligned}$$

Die Partialbruchzerlegung ist eindeutig, folglich muss diese Form bereits die gesuchte Lösung sein. Also $A = 2$, $B = -1$, $C = 2$, $D = 1$.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben am Mittwoch, 18. November 2015 in den Schnellübungen. Die Multiple-Choice-Aufgaben sind online einzureichen.