Serie 7

1. Was für eine Kurve stellt die Parametrisierung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin(1-t^2) \\ \cos(1-t^2) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

dar?

i) Ein Kreis
ii) Eine Ellipse
iii) Eine Parabel
iv) Eine Gerade
v) Ein anderes Objekt
vi) Diese Parametrisierung ist mathematisch nicht zulässig.

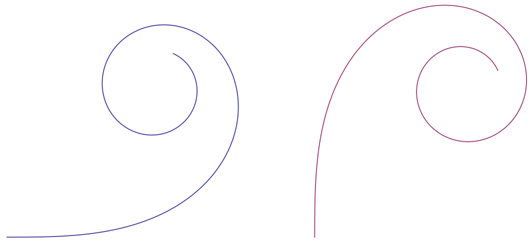
2. Wir betrachten für $C, l \in (0, \infty)$ die *Bernoulli-Spirale*, welche durch alle Punkte in $\mathbb{R}^2$ gegeben ist, deren Polarkoordinaten (ϱ, φ) die Gleichung

$$\varrho = Ce^{l\varphi}$$

erfüllen. Welche Aussagen sind richtig?

i) Die Differenz der x-Koordinaten zweier aufeinanderfolgender Schnittpunkte der Spirale mit der positiven x-Achse ist konstant.
ii) Die Evolute der Bernoulli'schen Spirale ist in Polarkoordinaten für $a, b \in \mathbb{R}$ durch die Gleichung $\varrho = a + b\varphi$ gegeben.
iii) Der Winkel zwischen dem Ortsvektor $\vec{r}(\varphi)$ eines Punktes auf der Spirale und seinem Tangentialvektor $\dot{\vec{r}}(\varphi)$ ist konstant.
iv) Der Quotient der x-Koordinaten zweier aufeinanderfolgender Schnittpunkte der Spirale mit der positiven x-Achse ist konstant.

3. Gegeben sind die Kurven K_1 (links) und K_2 (rechts), die beide für wachsenden Parameter t von links nach rechts durchlaufen werden. Es bezeichnen $k_1(t)$ und $k_2(t)$ die Krümmungen der beiden Kurven. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

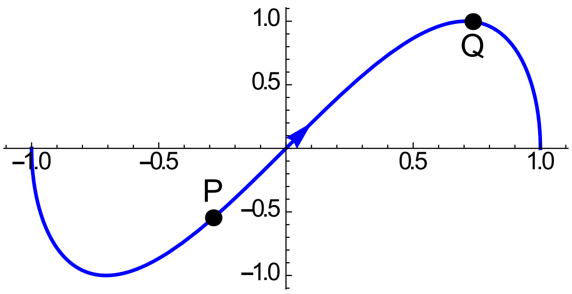


i) k_1 ist positiv.
ii) $t \mapsto k_2(t)$ ist monoton fallend.
iii) k_2 ist negativ.
iv) $t \mapsto k_1(t)$ ist monoton wachsend.

4. Welche der folgenden Kurven haben konstante Krümmung?

i) Der Kreis mit Mittelpunkt $(\frac{\sqrt{3}}{5}, 0)$ und Radius $\frac{7}{8}$.
ii) Die Ellipse mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Halbachsen $a = 2$ und $b = 3$.
iii) Die Kurve $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (4t, 7t - 8)$.
iv) Die Gerade durch $(2, -3)$ mit Steigung 1.

5. Prüfungsaufgabe Sommer 2015:
Betrachte die Kurve im Bild, die in Pfeilrichtung durchlaufen wird.



Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

i) Der Absolutwert der Krümmung in P ist grösser als in Q.
ii) In den Punkten mit $-1 < x < -\frac{1}{2}$ ist die Krümmung positiv.
iii) Es sei eine ebene Kurve gegeben durch die Parametrisierung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}, \; t \in [0, \pi].$$

Dann ist eine explizite Darstellung dieser Kurve gegeben durch

$$y(x) = 2x\sqrt{1 - x^2}, \text{ für } x \in [-1, 1].$$

6. Bestimme den im ersten Quadranten ($x > 0$, $y > 0$) liegenden Schnittpunkt der Kurven $xy = 3$ und $x^2 - y^2 = 8$. Beweise ausserdem, dass sich die Kurven in diesem Punkt orthogonal schneiden (d. h. dass die beiden Tangenten aufeinander senkrecht stehen).

7. Man bestimme die Krümmungsfunktion $t \mapsto k(t)$ sowie die Evolute $t \mapsto \vec{z}(t)$ der kubischen Parabel $t \mapsto \vec{r}(t) = (t, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$. Wo wird die Krümmung minimal oder maximal? (Man beachte das Vorzeichen.) Wie verhält sich $\vec{z}(t)$ in der Nähe von $t = 0$?

8. Prüfungsaufgabe Sommer 2014:
Gegeben ist die Parametrisierung der Kettenlinie

$$\alpha\colon t \mapsto (t, \cosh t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimme die Krümmungsfunktion $t \mapsto k(t)$ der Kurve α sowie den Radius r_0 und das Zentrum z_0 des Krümmungskreises an der Stelle $t = 0$.

b) Dieser Kreis (mit festem Radius r_0) rolle entlang α ab. Bestimme das Zentrum $z(t)$ des Kreises mit Berührpunkt $\alpha(t)$ sowie den Geschwindigkeitsvektor der Kurve $t \mapsto z(t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$.

9. Das *Kartesische Blatt* ist die Kurve C gegeben durch die Parameterdarstellung

$$x = \frac{t}{t^3+1}\,, \qquad y = \frac{t^2}{t^3+1},$$

wobei $-\infty < t < -1$ und $-1 < t < +\infty$.

a) Bestimme die Gleichung, d. h. eine implizite Darstellung, von C.

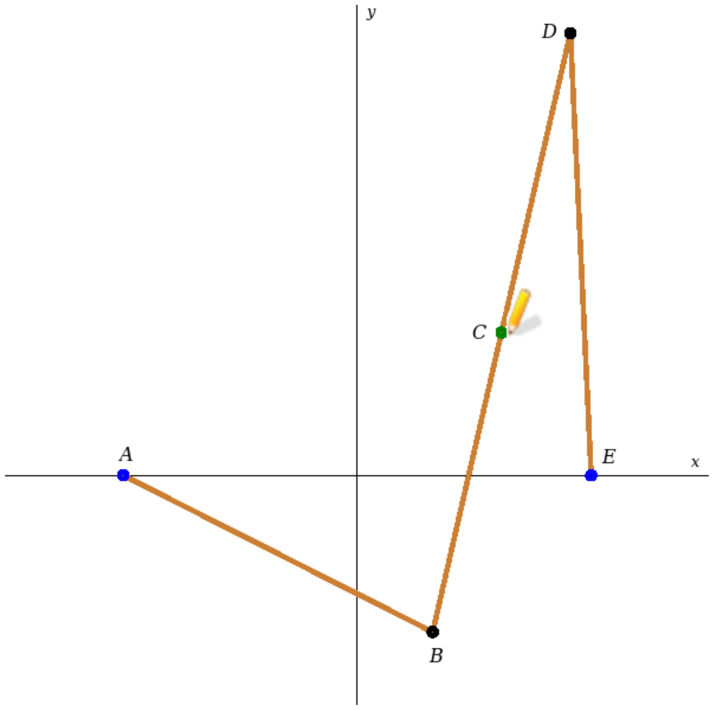
b) Zeige, dass C bezüglich der Geraden $y = x$ symmetrisch verläuft.

c) Bestimme die Schnittpunkte von C mit der Symmetrieachse $y = x$ sowie die Tangenten in diesen Schnittpunkten.

d) In welchen Punkten sind die Tangenten parallel zu den Koordinatenachsen ?

e) Zeige, dass die Gerade $y = -x - \frac{1}{3}$ eine Asymptote von C ist.

10. Die Punkte $A = (-1,\, 0)$ und $E = (1,\, 0)$ in der Ebene seien durch drei bewegliche dünne Stäbe AB, BD und DE der Längen $\sqrt{2}$, 2 bzw. $\sqrt{2}$ miteinander verbunden. K sei die Menge aller möglichen Positionen des Mittelpunktes $C = (x,\, y)$ der Strecke BD.



a) Es bezeichne α den Steigungswinkel der Strecke BD. Drücke die Tatsache, dass D im Abstand $\sqrt{2}$ von E liegt, durch eine Gleichung in x, y und α aus.

b) Bestimme eine entsprechende Gleichung für B.

c) Bilde die Summe sowie die Differenz der in **a)** und **b)** erhaltenen Gleichungen und zeige dann, dass die Punkte in K entweder

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & x^2 + y^2 = 2 \qquad \text{oder} \\ \text{(II)} & (x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2) \end{array}$$

erfüllen.

d) Welche Kurve beschreibt (I)?

e) Wie lautet die Gleichung (II) in Polarkoordinaten ϱ, φ?
Hinweis: $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben am Mittwoch, 11. November 2015 in der Vorlesung. Die Multiple-Choice-Aufgaben sind online einzureichen.