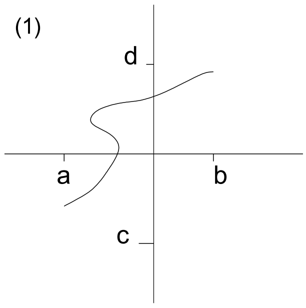
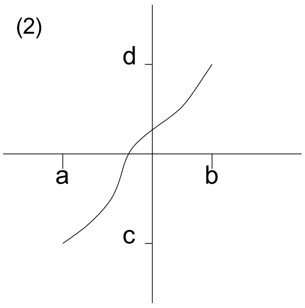
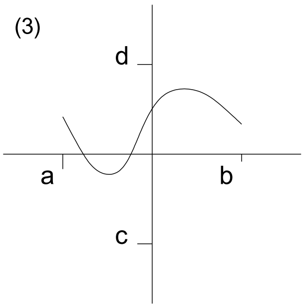
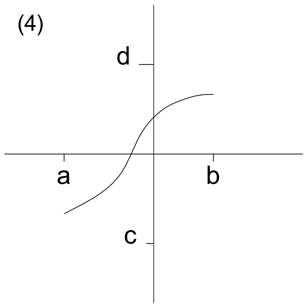
Serie 3

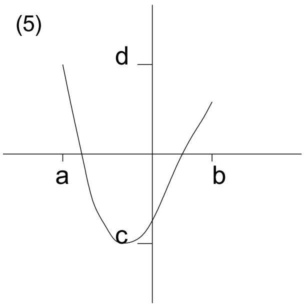
1. Welche der folgenden Bilder sind Graphen einer injektiven bzw. surjektiven Funktion $[a, b] \to [c, d]$?











- ☐ (1) ist injektiv
- ☐ (2) ist injektiv
- ☐ (3) ist injektiv
- ☐ (4) ist injektiv
- ☐ (5) ist injektiv
- ☐ (1) ist surjektiv
- ☐ (2) ist surjektiv
- ☐ (3) ist surjektiv
- ☐ (4) ist surjektiv
- ☐ (5) ist surjektiv

2. Sei $I := (0, 4\pi)$. Welche der folgenden Funktionen $f_i : I \to \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3, 4$, ist injektiv?

- ☐ $f_1(\varphi) := (\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0)$
- ☐ $f_2(\varphi) := (\cos(\varphi), \sin(\varphi), \sin(\varphi/2))$
- ☐ $f_3(\varphi) := (\cos(\varphi), \sin(\varphi), \sin(\varphi))$
- ☐ $f_4(\varphi) := (\cos(\varphi), \sin(\varphi), \sin(2\varphi))$

- ☐ Keine der obigen.

3. Was ist die Wertemenge der Funktion $f : [0, 4\pi] \to [-2, 2]$, $x \mapsto \sin^2(x) + 1$?

- ☐ $[0, 2]$
- ☐ $[-2, 2]$
- ☐ $[1, 2]$
- ☐ $[1, \pi^2 + 1]$
- ☐ $[0, 4\pi]$

4. Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^3 + 1$. Welche Gleichung beschreibt die inverse Funktion f^{-1}?

- ☐ $f^{-1}(x) = \frac{1}{x^3+1}$
- ☐ $f^{-1}(x) = x^3 - 1$
- ☐ $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^3 + 1}$
- ☐ $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$
- ☐ Die inverse Funktion existiert nicht.

5. Welche der folgenden Funktionen $(-1, 1) \to \mathbb{R}$ sind streng monoton wachsend?

- ☐ $x \mapsto |x| + x$
- ☐ $x \mapsto x^3 - x$
- ☐ $x \mapsto e^x$
- ☐ $x \mapsto \arccos x$
- ☐ $x \mapsto x^2$
- ☐ Keine.

6. Bestimme für jede Funktion einen Definitionsbereich so, dass sie reellwertig und invertierbar ist. Gib dann die entsprechenden inversen Funktionen sowie deren Definitions- und Wertebereiche an.

a) $f\colon x \mapsto -2x^2 + 8x + 3,$

b) $g\colon x \mapsto 2e^{-x^2},$

c) $h\colon x \mapsto \log\left(\frac{1+x}{x}\right),$

d) $k\colon x \mapsto \sqrt{3x - 2 + 2\sqrt{6x + 6}}.$

7. a) Gegeben sei die Funktion f mit Definitionsbereich $D_f = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ und der Abbildungsvorschrift $f(x) = \tan(x)$. Man bestimme die inverse Funktion von f.

b) Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Man finde alle reellen Lösungen x der Gleichung

$$\tan(\pi(1 + \tfrac{1}{2}\cos(x))) = a.$$

8. Betrachte die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \min((x+1)^3 - 1, \max(x, x^2))$.

a) Skizziere die Funktion f und schreibe sie als stückweise definierte Funktion.

b) Zeige, dass $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und injektiv ist.

c) Bestimme die Umkehrfunktion f^{-1} von f.

9. Man beweise die Relationen

a) $\tan(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ für $-1 < x < 1$;

b) $\cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ für $x \in \mathbb{R}$;

c) $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$ für $0 \le x \le 1$.

10. Bei den folgenden Funktionen bestimme man eine (polynomielle) Asymptote für $t \to \infty$. Forme dazu geeignet um.

a) $f(t) := \dfrac{t}{t + \sqrt{t}}$;

b) $h(t) := \dfrac{t^5 + 3t^4 + 2t^3 + t^2 + 8t + 2}{t^3 + 1}$.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben am Mittwoch, 14. Oktober 2015 in der Vorlesung.
Die Multiple-Choice-Aufgaben sind online einzureichen.