Anwendungsübungen MATL

Aufgabe 1 (Explizite Darstellung einer rekursiven Folge)

Es geht in dieser Aufgabe darum, wie man aus der rekursiven Darstellung einer Folge eine explizite Darstellung bestimmen kann, mit der sich meistens viel einfacher arbeiten läßt. Wir betrachten die Folge

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + x_{n-1}\right) \tag{1}$$

für natürliche Zahlen $n \geq 0$ mit den Startwerten $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$.

(a) Fällt Dir irgendein einfaches Modell oder ein Vorgang ein, den die Folge (1) beschreiben könnte?

(b) Berechne die ersten paar Folgeglieder und versuche herauszufinden, nach welcher Systematik sich diese verhalten. Wenn Dir nichts auffällt, betrachte die Abstände der Folgeglieder voneinander und suche dort eine Systematik.

(c) Finde mit Hilfe von (b) eine explizite Darstellung der Folge und prüfe, ob sie stimmt.

Aufgabe 2 (Lösen von nichtlinearen Gleichungen)

Der sogenannte Widerstandsbeiwert c_W eines Körpers ist ein Maß für seine Stromlinienförmigkeit. Die Zahl c_W hängt von der Gestalt und Oberflächenrauhigkeit des Körpers ab, ferner von der sogenannten Reynolds-Zahl R, die proportional zur durchschnittlichen Fließgeschwindigkeit der Strömung ist. Wird z.B. eine Kugel in einem glatten Rohr einer starken, turbulenten Strömung ausgesetzt ($R > 2000$), gilt nach Prandtl (1875-1953) folgende Beziehung für c_W:

$$c_W = \frac{1}{(2\log_{10}\left(R\sqrt{c_W}\right) - 0.8)^2}. \tag{2}$$

Wir wollen nun wissen, wie groß c_W für eine Strömung mit $R = 10^6$ ist.

(a) Bestimme einen ungefähren Wert von c_W aus (2), egal wie.

Nichtlineare Gleichungen wie (2), die sich nicht auflösen lassen, kann man zumindest näherungsweise lösen. Eine Methode dazu ist das sogenannte Sekantenverfahren: Die rekursive Folge

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\,\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

nähert sich einer Lösung von $f(x) = 0$, sofern die Startwerte x_0 und x_1 nahe genug an der Lösung liegen.

(b) Versuche, die geometrische Bedeutung des Sekantenverfahrens zu verstehen und zu erklären, warum es konvergiert.

(c) Wende das Sekantenverfahren auf (2) an, um näherungsweise das gesuchte c_W für $R = 10^6$ zu bestimmen (2-3 Schritte reichen). Vernünftige Startwerte x_0 und x_1 erhält man aus (a).

Aufgabe 3 (Erzeugung von Zufallszahlen)

Bei fast allen Anwendungen rekursiver Folgen (z.B. in den Aufgaben 1-2) interessiert hauptsächlich deren Grenzwert; eine Ausnahme bildet jedoch die folgende sehr populäre Methode zur Erzeugung von Zufallszahlen. Sie heißt linear congruential method (LCM) und funktioniert prinzipiell so: Die rekursive Folge

$$x_{n+1} = (a\ x_n + b) \bmod m$$

mit Startwert x_0 soll für jedes n eine Zufallszahl erzeugen, wobei a, b, m irgendwelche festen, positiven Konstanten sind und mod den Rest einer Division liefert[1]. Ob die LCM brauchbare Zahlen[2] erzeugt, hängt allerdings stark von der richtigen Wahl der Parameter a, b, m und x_0 ab.

(a) In welchem Bereich liegen die Zahlen, die man mit der LCM erhalten kann (die Parameter $a,\ b,\ m$ und x_0 seien vorgegeben)?

(b) Führe die LCM mit den folgenden Parametersätzen durch und gib an, welche der Parametersätze unbrauchbar sind und warum.

- $a = 17,\ b = 1,\ m = 307,\ x_0 = 0,\ n \leq 10000.$
- $a = 2,\ b = 0,\ m = 10000,\ x_0 = 1,\ n \leq 13.$
- $a = 2,\ b = 0,\ m = 10000,\ x_0 = 1,\ n \leq 10^6.$
- $a = 0.9,\ b = 0,\ m = 10000,\ x_0 = 5,\ n \leq 10^6.$
- $a = 1,\ b = 1,\ m = 10000,\ x_0 = 2,\ n \leq 1000.$

Wer mehr über die LCM und die korrekte Wahl der Parameter erfahren will, kann sich z.B. en.wikipedia.org/wiki/Linear_congruential_generator zu Gemüte führen.

[1] Es gilt also z.B. 4 mod 3 = 1, 2 mod 8 = 2 oder 3.9 mod 2 = 1.9

[2] Gemeint sind Zahlen, die unkorreliert und statistisch gut verteilt sind.

Aufgabe 4 (Plattenkondensator und Heaviside-Funktion)

Unter einem Plattenkondensator versteht man zwei parallel zueinander angeordnete Platten, die entgegengesetzt elektrisch geladen sind. Zwischen den Platten bildet sich ein sogenanntes elektrisches Feld, das eine Kraft auf geladene Objekte ausübt, die sich dort befinden: das Objekt wird von der entgegengesetzt geladenen Platte angezogen bzw. von der anderen abgestoßen. Diese Kraft lässt sich durch ein Potential V ausdrücken. Nehmen wir einfacherweise an, eine Platte befinde sich auf der Höhe $z = 1$ und die andere auf $z = 2$, dann schreibt man das Potential wie folgt:

$$V(z) = c_1\ \vartheta(1-z) + kz\ \vartheta(z-1)\ \vartheta(2-z) + c_2\ \vartheta(z-2)$$

wobei c_1, k, c_2 von den Platten abhängige Konstanten sind und ϑ ("Heaviside-Funktion") folgendermaßen definiert ist:

$$\vartheta(z) = \left\{ \begin{array}{cl} \lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(kz)\right) & \text{für } z \neq 0 \\ 0 & \text{für } z = 0 \end{array} \right\}$$

(a) Wie sieht die Funktion ϑ aus? Skizziere sie und gib eine grenzwertfreie Darstellung an.

(b) Skizziere die Potentialfunktion V mit Hilfe von (a).

(c) Erkläre, wieso V als Potential eines Plattenkondensators sinnvoll ist.

Die Heaviside-Funktion ist übrigens ein sehr weit verbreitetes Notationshilfsmittel, man kommt nicht um sie herum.

Aufgabe 5 (Ideale Gasgleichung und van der Waals-Gleichung)

Ein Gas, dessen Teilchen punktförmig sind und nicht miteinander wechselwirken, nennt man ″ideales″ Gas. Ein solches Gas gibt es zwar nicht, aber die Modellvorstellung des idealen Gases liefert in vielen Fällen gute Näherungen an wirkliche (″reale″) Gase, nämlich genau dann, wenn dessen Teilchen sehr klein sind und wenig miteinander wechselwirken. 1 Mol eines idealen Gases erfüllt die sogenannte ideale Gasgleichung

$$p\,V = R\,T,$$

wobei p der Druck des Gases, T seine Temperatur und V das Volumen ist, in dem sich das Gas aufhält. Die Zahl $R > 0$ ist eine Naturkonstante.

(a) Man skizziere die Funktion $p(V)$ für verschiedene Temperaturen und interpretiere die Skizzen. Was ist das physikalisch sinnvolle Definitionsgebiet von $p(V)$?

(b) Wieso ist $p(V)$ umkehrbar und wie lautet die Umkehrfunktion? Was bedeutet Umkehrbarkeit hier anschaulich (bitte keine mathematische Definition)?

Berücksichtigt man die endliche Ausdehnung der Gasteilchen und deren Wechselwirkung untereinander, so ergibt sich folgende Modifikation der idealen Gasgleichung

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = R\,T \qquad (\text{″Van der Waals-Gleichung″}).$$

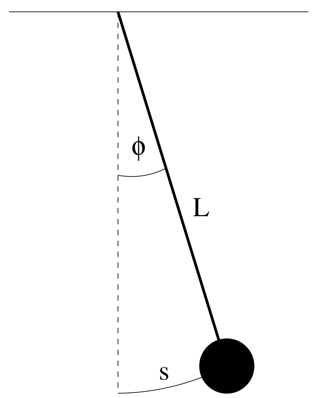
Hierbei beschreibt $a/V^2 > 0$ (″Binnendruck″) die Wechselwirkung der Gasteilchen miteinander und $b > 0$ (″Kovolumen″) ist das Volumen, das durch die Gasteilchen selbst eingenommen wird.

(c) Skizziere $p(V)$ aus der van der Waals-Gleichung für verschiedene Temperaturen. Was ist diesmal das physikalisch sinnvolle Definitionsgebiet und warum lautet es nicht genauso wie in (a)?

(d) Markiere in den Skizzen aus (c) die Intervalle, auf denen $p(V)$ jeweils umkehrbar ist und zeichne die entsprechende Umkehrfunktion ein.

Aufgabe 6 (Mathematisches Pendel)

Ein Pendel wie in der Abbildung heißt ″mathematisch″, wenn man das Gewicht als punktförmig und den Aufhängefaden als masselos annimmt.



An der Erdoberfläche wirkt folgende Kraft F auf das Gewicht:

$$F(\varphi) = -mg\sin(\varphi),$$

wobei m die Masse des Gewichtes, $g \approx 9.81\,\frac{m}{s^2}$ und φ der Winkel zwischen Pendelfaden und der Vertikalen ist. Wir wollen wissen, wie sich das Pendel (d.h. sein Ausschlag s) bei kleinen Auslenkungen verhält.

(a) Finde eine Näherungsfunktion für F, wenn man das Pendel nur sehr wenig auslenkt (*Hinweis:* linearisieren).

Das Pendel wird jetzt leicht ausgelenkt und vollführt eine Bewegung, d.h. s und φ können als Funktionen aufgefaßt werden, die von der Zeit abhängen.

(b) Was ist der Zusammenhang zwischen dem Winkel φ und dem Ausschlag s des Pendels? Man beachte, daß die Strecken s und L in der Abbildung bis zum Mittelpunkt des Gewichtes verlaufen (Gewicht punktförmig). *Hinweis:* Der gesuchte Zusammenhang hat mit der Zeit nichts zu tun.

Aus der Physik weiß man, daß die auf das Gewicht wirkende Kraft F zu jedem Zeitpunkt t (also immer) folgende Bedingung [3] erfüllt:

$$F(\varphi(t)) = mL\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\,\varphi(t)\right). \tag{3}$$

(c) Prüfe nach, daß (3) durch die Funktion $\varphi(t) = 0$ erfüllt wird. Was ist der physikalische Grund dafür?

(d) Setze für F die Näherung aus (a) ein und versuche, eine Funktion $\varphi(t)$ zu finden, die die Bedingung (3) erfüllt (aber nicht $\varphi(t) = 0$, bitte !).

[3] Eine Bedingung wie (3) nennt man ″Differentialgleichung″.

Aufgabe 7 (Interpolation von Funktionen)

In der Praxis tauchen oft Funktionen auf, mit denen sich sehr schlecht rechnen läßt. Entweder bestehen diese Funktionen aus vielen Termen, haben eine komplizierte Gestalt oder man kennt von ihnen vielleicht nur einige Funktionswerte und sonst nichts. In solchen Fällen versucht man, Näherungsfunktionen zu konstruieren und mit diesen zu rechnen.
Angenommen, wir haben eine Funktion f, die auf einem Intervall (a, b) definiert ist und wir kennen an den Stellen $x_1, x_2, ..., x_n \in (a, b)$ die entsprechenden Funktionswerte $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$. Wir konstruieren folgende Funktion P_n:

$$P_n(x) = \sum_{j=1}^{n} L_j(x)\ f(x_j),$$

wobei die L_j gegeben sind durch

$$L_j(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_{n-1})(x - x_n)}{(x_j - x_1)(x_j - x_2)(x_j - x_3) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_{n-1})(x_j - x_n)}.$$

In L_j wird also jeweils das Element $(x - x_j)$ im Zähler bzw. $(x_j - x_j)$ im Nenner weggelassen. Spezialfälle sind:

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \frac{(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_{n-1})(x - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_{n-1})(x_1 - x_n)} \\ L_2(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_3) \cdots (x - x_{n-1})(x - x_n)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \cdots (x_2 - x_{n-1})(x_2 - x_n)}. \end{aligned}$$

Das Polynom P_n soll eine Näherungsfunktion für f sein, es heißt ″Lagrange'sches Interpolationspolynom″.

(a) Welchen Grad hat P_n, d.h. was ist die höchste Potenz von x?

(b) Erkläre, wieso P_n eine Näherungsfunktion für f ist. *Hinweis:* Was ist $P_n(x_j)$?

Oft ist man nicht nur an einer Näherung von f, sondern auch von dessen Ableitung interessiert. Um diese Ableitung von f zu nähern, verwendet man einfach die Ableitung von P_n.

(c) Berechne die Ableitung P_n' von P_n.

Aufgabe 8 (Radioaktiver Zerfall)

Radioaktives Material besteht aus Teilchen, die nach einer gewissen Zeit zerfallen und dabei Strahlung aussenden. Man kann zwar nicht sagen, welches Teilchen wann zerfällt, aber dafür weiß man, wieviele Teilchen durchschnittlich pro Zeiteinheit zerfallen. Generell gilt: je mehr radioaktive Teilchen vorhanden sind, desto mehr zerfallen auch pro Zeiteinheit. Wir bezeichnen im folgenden die Anzahl radioaktiver Teilchen einer Probe in Abhängigkeit der Zeit mit $n(t)$. Angenommen, 5 Tage nach dem Fund einer radioaktiven Probe hat man noch $N > 0$ radioaktive Teilchen und zum Zeitpunkt des Fundes zerfielen $n_0 > 0$ Teilchen pro Tag.

(a) Welche Eigenschaften muß die Funktion $n(t)$ haben? Skizze.

(b) Gib eine obere Schranke für die Anzahl radioaktiver Teilchen zum Zeitpunkt des Fundes der Probe an. Was hat das mit dem Mittelwertsatz zu tun?

Man weiß, daß die Zerfallsgeschwindigkeit der Teilchen (Änderung der Anzahl radioaktiver Teilchen pro Zeiteinheit) proportional zur Teilchenanzahl ist.

(c) Drücke den letzten Satz durch eine Gleichung aus.

(d) Bestimme $n(t)$ aus der Gleichung und überprüfe (a).

(e) Berechne die Halbwertszeit des radioaktiven Materials (das ist die Zeit, nach der die Hälfte der ursprünglich vorhandenen radioaktiven Teilchen noch nicht zerfallen ist).

Aufgabe 9 (Brachystochronenproblem[4])

Im Jahre 1696 stellte Johann Bernoulli (1667-1748) ein zur damaligen Zeit neues mathematisches Problem ("Brachystochronenproblem"), das in althergebrachter Weise lautet:

"*Wenn in einer verticalen Ebene zwei Punkte A und B gegeben sind, soll man dem beweglichen Punkte M eine Bahn AMB anweisen, auf welcher er von A ausgehend vermöge seiner eigenen Schwere in kürzester Zeit nach B gelangt*".

Zur Vereinfachung nehmen wir an, daß A auf der y-Achse und B auf der x-Achse liegen soll: Wir setzen $A = (0, y_0)$ und $B = (x_0, 0)$ mit positiven Zahlen x_0 und y_0. Die Erdbeschleunigung sei konstant und gleich $g \approx 9.81$.

Die von Bernoulli gesuchte "Bahn" ist überraschenderweise nicht die Verbindungsstrecke zwischen A und B, sondern eine Zykloide, die durch die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{c^2}{4g}(t - \sin(t)) \\ y(t) &= y_0 - x'(t) \end{aligned}$$

($0 \leq t \leq t_{max} < 2\pi$) gegeben ist, wobei die Konstanten c und t_{max} durch der Lage von x_0 und y_0 bestimmt werden.

(a) Was ist der anschauliche Grund dafür, daß ein Massenpunkt auf einer gekrümmten Kurve schneller von A nach B rutschen kann als auf einer geraden Kurve? Das gesuchte Prinzip findet übrigens auch bei Radrennen mit Steilkurven und bei U-Bahnen Anwendung (Referenzen gibt's in der Lösung).

(b) Versuche, c und t_{max} für beliebige x_0 und y_0 zu bestimmen. Woran scheitert man?

(c) Wie lauten c und t_{max}, wenn $x_0/y_0 = \pi/2$ gilt? Wie groß ist die Steigung der Zykloide im Anfangspunkt $A = (0, y_0)$ und im Endpunkt $B = (x_0, 0)$?

(d) Skizziere die Punkte A, B und die verbindende Zykloide für folgende drei Fälle:

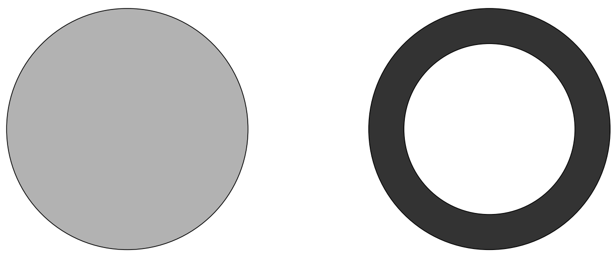
- $x_0/y_0 < \pi/2$,
- $x_0/y_0 = \pi/2$ (Teil (c)),
- $x_0/y_0 > \pi/2$.

Worin bestehen die Unterschiede zwischen den drei Fällen?

[4] griechisch: brachystos = kürzester, chronos = Zeit

Aufgabe 10 (Rotationskörper auf schiefer Ebene)

In TV-Shows und Rätselheftchen wird ab und zu folgendes Problem gestellt: Zwei Zylinder mit gleichen Abmessungen und gleicher Masse, aber unterschiedlicher Massendichte, sollen eine schiefe Ebene hinunterrollen und die Frage ist, welcher zuerst unten ankommt.
Typischerweise ist einer der beiden ein Vollzylinder (homogene Massenverteilung), der andere ist fast hohl und trägt all seine Masse in einer Schicht am Mantel, wie die folgenden Querschnitte zeigen:



Der linke Zylinder ist homogen mit Masse gefüllt, der rechte (mit gleichem Grundkreisradius und gleicher Höhe) ist hohl bis auf seinen dunkel gesetzten Rand, in dem die Masse ebenfalls homogen verteilt ist.

(a) Welche Eigenschaft der Zylinder bestimmt ganz allgemein, welcher schneller rollt (bei gleicher Masse und Abmessungen)?

(b) Finde heraus, welcher der beiden Zylinder schneller ist.
Hinweis: Verwende zur Berechnung von Trägheitsmomenten die entsprechende Formel für Rotationskörper. Beachte danach, daß die Massen beider Zylinder gleich sein sollen und verwende die Beziehung ″Masse = Dichte · Volumen″.

(c) Nun lassen wir noch eine Kugel die schiefe Ebene hinunterrollen. Die Kugel soll homogen mit Masse gefüllt sein, denselben Durchmesser wie der Grundkreis des Vollzylinders und dieselbe Masse wie der Vollzylinder haben. Ist die Kugel schneller als der Vollzylinder?

Aufgabe 11 (Rekapitulation: Van der Waals-Gleichung und Brachyostonenproblem)

Wir kommen noch einmal auf die van der Waals-Gleichung aus Übung 5 zurück, die reale Gase beschreibt:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = R\,T.$$

Hierbei ist p der Druck des Gases, T seine Temperatur und V das Volumen, in dem sich das Gas aufhält. Weiterhin sind die Zahlen a, b und R positiv.
Aus Übung 5 weiß man, daß die Funktion $p(V)$ (bei festgehaltener Temperatur) im Falle eines idealen Gases ($a = b = 0$) immer monoton ist; bei realen Gasen ($a > 0,\ b > 0$) trifft das aber nicht zu, d.h. $p(V)$ kann Extremwerte haben.

(a) Wieviele Extremwerte kann $p(V)$ im physikalisch sinnvollen Definitionsgebiet $V > b$ haben? Begründung!

(b) Um einfacher rechnen zu können, setzen wir $a = b = R = 1$. Untersuche die Funktion $p(V)$ für Temperaturen zwischen $T = 0.2$ und $T = 0.3$ und erkläre, was mit den Extremwerten passiert (im speziellen: was ist der "Grenzfall" zwischen zwei und keinem Extremum?).

(c) Was könnte eine physikalische Erklärung für die Nichtmonotonizität von $p(V)$ sein?

Wir kommen nun noch auf das Brachyostonenproblem aus Aufgabe 9 zurück. Die Zeit T_Z, die ein Massenpunkt mit Masse 1 benötigt, um auf der Zykloide von A nach B zu rutschen, lautet

$$T_Z = \frac{c}{g}\ \mathrm{arccotan}\left(\sqrt{\frac{c^2 - 2gy_0}{2gy_0}}\right),$$

und die Zeit T_S, die der Massenpunkt auf der Verbindungsstrecke zwischen A und B braucht, lautet

$$T_S = \frac{1}{\cos(\alpha)}\sqrt{\frac{2y_0}{g}},$$

wobei α der Winkel zwischen der Strecke $\overline{AB}$ und der y-Achse ist.

(d) Wir betrachten den Fall $x_0/y_0 = \pi/2$. Wie groß ist α? Wie ist das Verhältnis von T_Z und T_S, wenn y_0 bzw. x_0 groß werden? Skizziere beide Zeiten in Abhängigkeit von y_0 in ein Koordinatensystem.

(e) Wir betrachten immer noch den Fall $x_0/y_0 = \pi/2$. Angenommen, man läßt zur gleichen Zeit vom Punkt A aus einen Massenpunkt die Zykloide nach B hinunterrutschen und einen anderen Massenpunkt senkrecht hinunterfallen. Welcher der Massenpunkte erreicht den Boden zuerst und wie lange brauchen beide jeweils dazu?

Aufgabe 12 (Fibonacci-Zahlen)

Üblicherweise wird die Erfindung der Fibonacci-Zahlen dem italienischen Mathematiker Leonarda von Pisa zugeschrieben. Besser bekannt ist er unter dem Namen Fibonacci, der Kurzform von filius (it. Sohn) Bonacci. In der zweiten Version seines Rechenbuchs *Liber Abacci* (Buch vom Abacus) – die erste Version ist nicht überliefert – taucht folgende Aufgabe auf:

Jemand setzt ein Paar Kaninchen in einen Garten, der auf allen Seiten von einer Mauer umgeben ist, um herauszufinden, wieviele Kaninchen innerhalb eines Jahre geboren werden. Wenn angenommen wird, daß jeden Monat jedes Paar ein weiteres Paar zeugt, und daß Kaninchen zwei Monate nach ihrer Geburt geschlechtsreif sind, wie viele Paare Kaninchen werden dann jedes Jahr geboren?

(a) Finde die Anzahl Kaninchenpaare nach jedem Monat, innerhalb eines Jahres. Was kannst du über das Wachstum aussagen?

Wir definieren die Fibonacci-Folge durch das Rekursionsgesetz

$$a_{n+2} := a_{n+1} + a_n, \quad \forall\ n \geq 0\ ,$$

und die Anfangsbedingungen

$$a_0 := 1 \text{ und } a_1 := 1\ .$$

Interessanterweise treten die Fibonacci-Zahlen in der Schöpfung auf: Die Blätter oder Früchte von Pflanzen bilden oft Spiralmuster. Die Anzahl der Spiralen sind meist Fibonacci-Zahlen – ein Föhrenzapfen hat z.B. in der einen Richtung 8, in der anderen 13 Spiralen; bei der Sonnenblume beträgt die Anzahl 21 bzw. 34.

(b) Die Folge der Verhältnisse $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ der aufeinanderfolgenden Fibonacci-Zahlen konvergiert. Berechne ihren Grenzwert φ aus dem Rekursionsgesetz! Er heisst *Goldener Schnitt*.

(c) Mithilfe der Lösungstheorie für homogene lineare Differenzengleichungen kommt man auf Binets Formel:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

Beweise diese explizite Formel für den n-ten Term durch Induktion!

(d) Beweise per Induktion, dass $a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2 = (-1)^{n+1}$. Folgere für *gerade* n's mit Hilfe eines Tangens-Additionstheorems daraus die Kuriosität

$$\arctan\frac{1}{a_n} + \arctan\frac{1}{a_{n+1}} = \arctan\frac{1}{a_{n-1}}.$$

Hinweis: Beweise zuerst, dass $a_n a_{n+1} + (-1)^{n+1} = a_{n-1}(a_{n+1} + a_n)$.