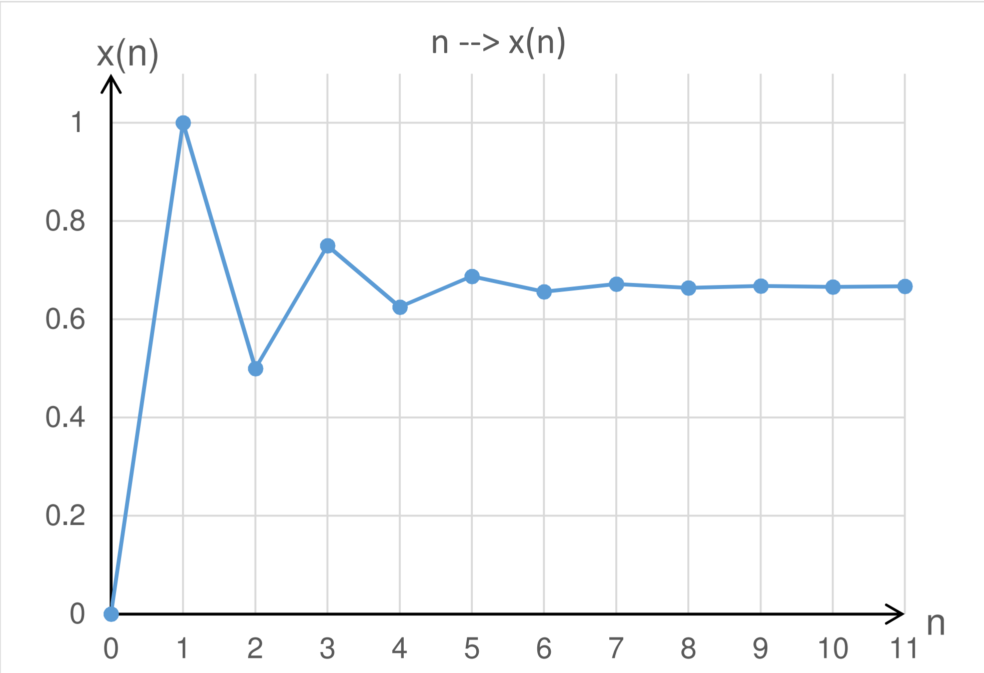
Aufgabe 1: Explizite Darstellung einer rekursiven Folge

Ausgangslage :

$X_{n+1} = \frac{1}{2} * (X_n + X_{n-1})$ $X_0 = 0$ $X_1=1$

a)



Folgenglieder	Wert		Abstand	
n	x(n)	x(n) (als Bruch)	x(n)-x(n-1)	x(n)-x(n-1) (als Bruch)
0	0	0	-	-
1	1	1	1	1
2	0.5	1/2	-0.5	- 1/2
3	0.75	3/4	0.25	1/4
4	0.625	5/8	-0.125	- 1/8
5	0.6875	11/16	0.0625	1/16
6	0.65625	21/32	-0.03125	- 1/32
7	0.671875	43/64	0.015625	1/64
8	0.664063	85/128	-0.0078125	- 1/128
9	0.667969	171/256	0.00390625	1/256

b) Zuerst berechnet man ein paar Folgenglieder (weiter Folgenglieder siehe Tabelle):

$X_2 = \frac{1}{2} * (1 + 0)$ $X_2 = \frac{1}{2}$

$X_3 = \frac{1}{2} * (\frac{1}{2} + 1)$ $X_3 = \frac{3}{4}$

$X_4 = \frac{1}{2} * (\frac{3}{4} + \frac{1}{2})$ $X_4 = \frac{5}{8}$

$X_5 = \frac{1}{2} * (\frac{5}{8} + \frac{3}{4})$ $X_5 = \frac{11}{16}$

Man erkennt schnell, dass sich keine regelmässigen Werte ergeben.

Deswegen überprüft man die Abstände der Folgenglieder (siehe Tipp in (b)).

Die Abstände können in der Tabelle entnommen werden.

Man erkennt dass die Differenzen abwechselnd Negativ und Positiv sind. Zudem sieht man, dass sich der Abstand um ein Faktor ½ verändert.

Diese Systematik lässt sich durch folgende Formel ausdrücken $X_{n+1}-X_n = (-\frac{1}{2})^n$

Die Formel könnte man auch schreiben als $X_{n+1}-X_n = (-1)^n * (-\frac{1}{2})^n$

$(-1)^n$ ist für das plus und minus zuständig. Dass bedeutet, wenn man eine gerade Zahl von n hat wird der Abstand positiv, wenn ungerade negativ.

c) Man kennt das erste Folgenglied $X_0 = 0$ und durch Aufgabe b den Abstand der Folgenglieder.

Somit kann man die Folge wieder konstruieren als

$x_1=x_0$ + Abstand (von X_1,X_0)= 1

somit gilt dies auch für X_n

$X_n = X_0 + \text{Abstand}(X_n,X_{n-1}) + \text{Abstand}(X_{n-1},X_{n-2}) + \text{Abstand}(X_{n-2},X_{n-3}) + \ldots + \text{Abstand}(X_1,X_0)$

Das ist ja dasselbe wie

$X_n = X_0 + (-\frac{1}{2})^{n-1} + (-\frac{1}{2})^{n-2} + (-\frac{1}{2})^{n-3} + \ldots + (-\frac{1}{2})^1$

Nun ist der TRICK diese Abfolge $(-\frac{1}{2})^{n-1} + (-\frac{1}{2})^{n-2} + (-\frac{1}{2})^{n-3} + \ldots + (-\frac{1}{2})^1$ als Summe zu sehen.

Somit schreibt man:

$$X_n = X_0 + \sum_{i=0}^{n-1} (-\frac{1}{2})^i$$

Da nun X_0 so oder so 0 ist ergibt sich

$$X_n = \sum_{i=0}^{n-1} (-\frac{1}{2})^i$$