Aufgabe 2:
Lösen von nichtlinearen Gleichungen

Enea Svaluto und Louis Henri Furtado

12.10.2015

Ziel

Wir wollen wissen, wie gross C_w für eine Strömung mit $R = 10^6$ ist.

$$\boxed{C_w = \frac{1}{(2log_{10}(R\sqrt{C_w}) - 0.8)^2}}$$

Formel 2

Es gibt aber ein Problem: man kann nicht diese Gleichung linear lösen.

a. Bestimme einen ungefähren Wert von C_w aus 2, egal wie

Man tranformiert 2 in eine Funktion f(x) mit $x = C_w$.

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{(2log_{10}(R\sqrt{x}) - 0.8)^2} - x = 0}$$

f(x) muss gleich Null sein. Jetzt kann man die Nullstellen finden.
Wir haben den Graph von f(x) mit MatLab dargestellt:

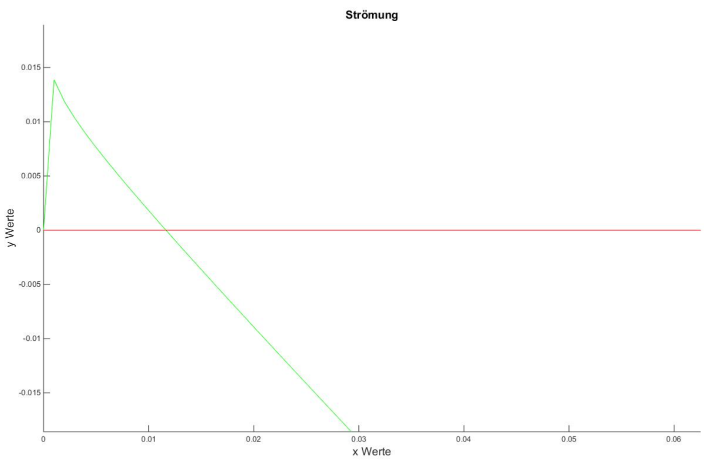

Figure 1: Graph von f(x)

Mit diesem Graph kann man sehen ungefähr, wo die Nullstellen sich finden.

b. Versuche, die geometrische Bedeutung des Sekantenverfahrens zu verstehen und zu erklären, warum es konvergiert

Man braucht das Sekantenverfahren, um die Nullstellen zu finden. Man sucht eine Sekante, die ihre Nullstellen an derselben Stelle, wie die Funktion hat.

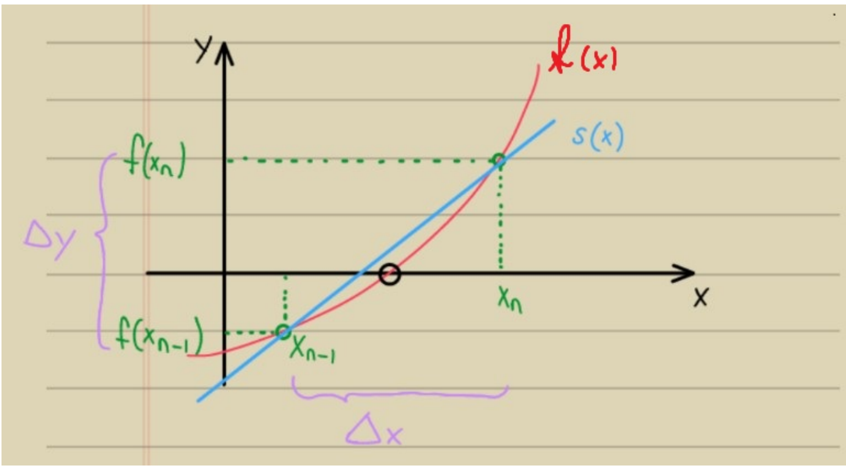

Figure 2:

Idee: Transformation der Sekante:

$$\boxed{s(x) = \Delta x * m + f(\Delta x)}$$

mit: $\Delta x = x_n - x_{n-1}$

$$m = \frac{f_n - f_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \longrightarrow \text{Steigung}$$

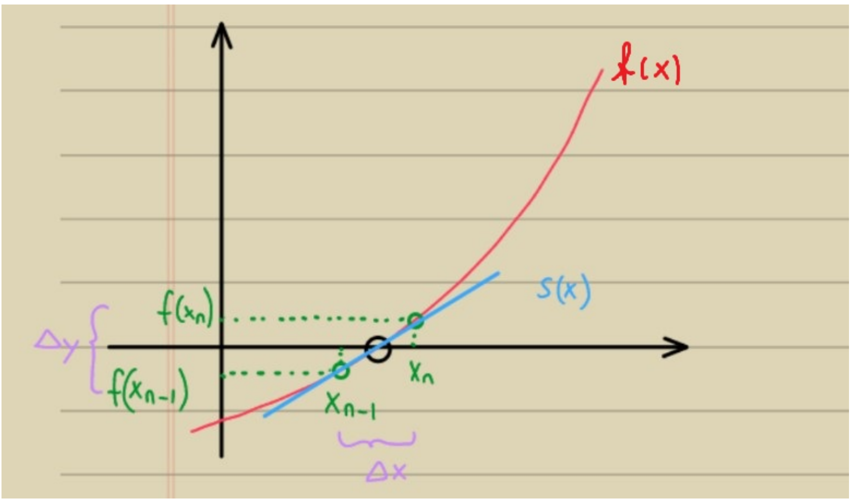

Figure 3:

Man nimmt die allgemeine Gleichung von der Gerade, die durch 2 Punkten x_0 und x_1 durchgeht.

$$\boxed{y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_1) + f(x_1)} \quad \text{Allgemeine Gleichung}$$

Im diesem Fall ersetzen wir y mit s(x), $f(x_1)$ mit $f(x_n)$ und $f(x_0)$ mit $f(x_{n-1})$

$$\Rightarrow s(x) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x - x_n) + f(x_n)$$

Da s(x) dieselbe Nullstelle hat wie f(x) setzen wir s(x)=0:

$$0 = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x - x_n) + f(x_n)$$

$$-f(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x - x_n)$$

$$-f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = (x - x_n)$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}} \quad \text{Sekantenverfahren}$$

Das Sekantenverfahren ist ein Spezialfall von dem Newton-Verfahren:

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, wo man die Ableitung $f'(x_n)$ durch den Differentialquotient

$f'(x_n) = m = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$ ersetzt.

Dieses Verfahren hat zwei wichtige Vorteile:
- man braucht nicht die Ableitung zu berechnen.
- gegeben zwei Startwerten wird die Richtung von der Sekante bestimmt und deshalb konzentriert sich das Verfahren auf einem bestimmte Intervall.

Das Sekanteverfahren konvergiert nach einer bestimmte Zahl, für die die Funktion f(x) gegen 0 konvergiert.

Um diese Methode zu verwenden, muss die Funktion f(x) stetig sein und genau eine Nullstellen haben.

c. Wende das Sekantenverfahren an, um näherungsweise das gesuchte C_w für $R = 10^6$ zu bestimmen (2-3 Schritten reichen). Vernünftige Startwerte x_0 und x_1 erhält man aus a.

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{(2 * (6 + log_{10}(\sqrt{x})) - 0.8)^2} - x}$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}}$$

Um die Werte der folgenden Tabelle zu berechnen, muss man zwei vernünftige Startwerte x_0 und x_1 wählen und deren Bilder $f(x_0)$ und $f(x_1)$ berechnen. Jetzt kann man das Sekantenverfahren anwenden, um die neue x zu finden. Das ganze Prozess wird wiederholt (Iterative Prozess) bis man $f(x_{n+1}) = 0$ findet.

n	x_n	$f(x_n)$
0	0.00100000000	0.0138721
1	0.02000000000	-0.00892207
2	0.01256304007	-0.000998759
3	0.01162558764	2.29191E-05
4	0.01164661734	-8.3877E-08
5	0.01164654066	-7.38443E-12
6	0.01164654065	0
7	0.01164654065	0

Man sieht, dass mit n=6 d.h. $x_6 = 0.01164654065$ ist die $f(x_6) = 0$, deshalb konvergiert das Sekantenverfahren nach x_6 und konvergiert die Funktion $f(x_6)$ gegen Null.