Fibonacci-Zahlen

Allgemein

Die Fibonacci-Zahlen stellen eine der interessantesten existierenden Zahlenfolgen dar. Ihr Auftreten sowohl in der Natur als auch in der Mathematik erscheint oft zufällig und weist auf ihre Signifikanz hin.

Einzelne Glieder der Folge kommen zum Beispiel oft beim Wachstum von Pflanzen vor. Man findet sie in der Anzahl Ästen von Bäumen, dem Muster einer Ananas oder den Blättern einer Artischocke. Auch in der Mathematik kommen sie immer wieder vor, beispielsweise im Pascal'schen Dreieck, als Summe der um zwei zur Seite und eins nach oben versetzten Glieder. Sie werden heute in bestimmten Algorithmen auch praktisch verwendet.

Ursprünglich festgehalten wurde die Folge durch den italienischen Mathematiker Leonardo von Pisa, auch Fibonacci genannt. Er definierte die Folge als die Wachstumsrate einer Kaninchenpopulation wie folgt:

„Wenn angenommen wird, dass jeden Monat ein Paar ein weiteres Paar zeugt, und dass Kaninchen zwei Monate nach ihrer Geburt geschlechtsreif sind, wie viele Paare Kaninchen werden dann jedes Jahr geboren?"

Aufgabe a)

Eine Tabelle für die Anzahl Kaninchenpaare im jeweiligen Monat sieht wie folgt aus:

Monat	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Paare	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Es ergibt sich also ein leicht erkennbares Rekursionsgesetz: Das nte Glied ist jeweils die Summe des n-1ten und des n-2ten (n > 1), wobei das 0te Glied a0 = 1 und das erste a1 = 1.

Diese Folge ist unter anderem relevant, weil das Verhältnis eines Glieds auf das ihm vorangehende gegen einen wichtigen Wert namens „Goldener Schnitt" konvergiert. Dieser goldene Schnitt lässt sich leicht aus dem Rekursionsgesetz berechnen. Denn für n→∞ muss das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Glieder an und an+1 gleich dem Kehrwert des Verhältnisses von an-1 und an sein.

Aufgabe b)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}}$$

$$\rightarrow 0 = \Phi^2 * \Phi - 1$$

$$\Phi = 1{,}618034$$

Aufgabe c)

Zu beweisen mittels vollständiger Induktion:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

Nachweis von $n = 2$

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{3} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{3}\right] = 2 = 1 + 1$$

Schluss von n und $n+1$ auf $n+2$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right] + \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} * \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} * \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} * \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} * \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+3} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+3}\right] = a_{n+2}$$

q.e.d.

Aufgabe d)

Zu beweisen Mittels Induktion:

$$(-1)^{n+1} = a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2$$

Term Umformung

$$(-1)^{n+1} = a_{n+1}a_{n-1} - a_n(a_{n+1} - a_{n-1})$$
$$a_n a_{n+1} + (-1)^{n+1} = a_{n-1}(a_{n+1} + a_n)$$

Nachweis für $n = 1$

$$1 * 2 + (-1)^2 = 1 * (2 + 1)$$

Schluss von n auf $n+1$

$$\begin{aligned} a_{n+1}a_{n+2} + (-1)^{n+2} &= a_n(a_{n+1} + a_{n+2}) \\ &= a_{n+1}a_{n+2} - a_{n-1}(a_{n+1} + a_n) + a_n a_{n+1} \\ &= a_{n+1}a_{n+2} - a_{n-1}a_{n+1} + a_n(a_{n+1} - a_{n-1}) \\ &= a_{n+1}a_n + a_{n+1}(a_{n+1} - a_{n-1}) + a_n a_n \\ &= a_{n+1}a_n + a_{n+1}a_n + a_n a_n \\ &= a_n(a_{n+1} + a_{n+2}) \end{aligned}$$

q.e.d.

Somit folgt für grade n

$$(-1) = a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2$$

Somit folgt

$$\arctan\left(\frac{1}{a_n}\right) + \arctan\left(\frac{1}{a_{n+1}}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}}}{1 - \frac{1}{a_n a_{n+1}}}\right)$$

Mittels Term Umformung erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}}}{1 - \frac{1}{a_n a_{n+1}}} &= \frac{a_{n+1} + a_n}{a_n a_{n+1}} * \frac{a_n a_{n+1}}{a_n a_{n+1} - 1} \\ &= \frac{a_{n+1} + a_n}{a_n a_{n+1}} * \frac{a_n a_{n+1}}{a_{n-1}(a_{n+1} + a_n)} = \frac{1}{a_{n-1}} \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\arctan\left(\frac{1}{a_n}\right) + \arctan\left(\frac{1}{a_{n+1}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{a_{n-1}}\right)$$

q.e.d.