

Anwendungsübung Analysis; Aufgabe 5

Ideale Gasgleichung und Van der Waals-Gleichung:

Gegeben: $pV = RT$ und $\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$

Wobei die Konstante $R=8.314\text{J/K}$
 a/b : gasabhängige Konstante

Ziel: Grafen der jeweiligen Funktion $p(V)$ sowie deren Umkehrfunktion für verschiedene Temperaturen aufzeigen

Ideale Gasgleichung

Die ideale Gasgleichung beschreibt das Verhältnis des Volumens zum Druck eines idealen Gases für ein Mol bei einer bestimmten Temperatur. Die Teilchen eines idealen Gases sind punktförmig und haben keine Wechselwirkung untereinander. Obwohl keine solchen Gase existieren ist die ideale Gasgleichung trotzdem eine sehr gute Annäherung an die Wirklichkeit vor allem bei kleinen Teilchen mit geringer Wechselwirkung.

Der Graphen der Idealen Gasgleichung (Abb. 1) zeigt, dass Volumen und Druck umgekehrt proportional zueinander sind und jeweils proportional zum Druck.

Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, da negative Volumen wenig Sinn machen und bei Volumen gleich Null der Druck ins Unendliche steigen würde.

Eine eindeutige Umkehrfunktion existiert sobald die Funktion bijektiv ist. Jedem Volumen ist ein eindeutiger Druck zugeordnet und jede Gösse der Zielmenge wird mindestens einmal angenommen.

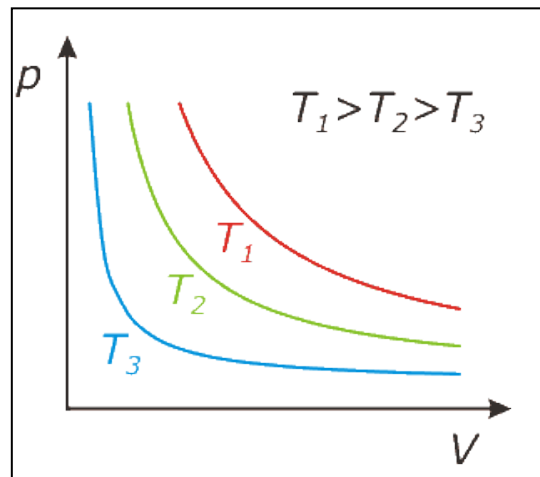


Abbildung 1: Graph der Idealen Gasgleichung

Somit ist sie umkehrbar: $V(p) = \frac{RT}{p}$

Van der Waals Gleichung

Berücksichtigt man nun die Zwischenmolekularen Kräfte und das Volumen der Gasteilchen erhält man eine Näherungsgleichung für reale Gase; die Van der Waals-Gleichung:

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

Der Definitionsbereich muss dementsprechend angepasst werden, da der Volumenterm $(V-b)$ immer noch > 0 sein muss. Daraus ergibt sich, dass $V > b$ sein muss.

Die Funktion ist nicht mehr für alle T gänzlich umkehrbar deshalb muss sie in drei Intervalle unterteilt werden:

$$I_1 =]b, \min(p(V)) [$$

$$I_2 = [\min(p(V)), \max(p(V))]$$

$$I_3 =]\max(p(V)), \infty [$$

$$\text{Für: } p(V) = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

Generell gilt je tiefer die Temperatur desto grösser ist die Abweichung von der idealen Gasgleichung, besonders wenn diejenige Temperatur erreicht wurde ab der sich das jeweilige Gas verflüssigen kann. Wenn diese Temperatur erreicht wird ist durch die Konstanten a und b bestimmt.

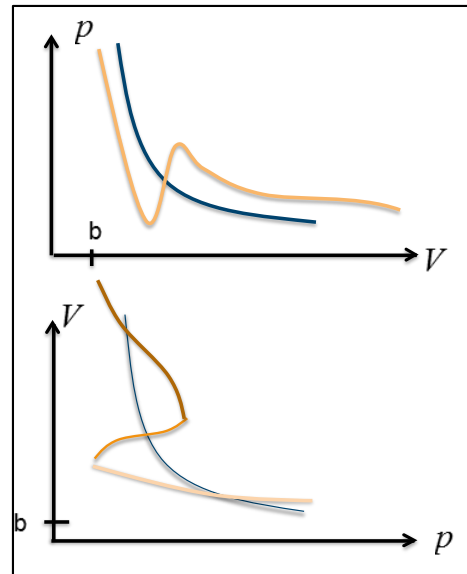


Abbildung 2: Graphen der Van der Waals Gleichung (oben) und deren Umkehrfunktion (unten)