Celin Küderli/Benjamin Obwegeser Handout

Analysis: Anwendungsübungen

Aufgabe 6: Mathematisches Pendel

Das mathematische Pendel ist ein idealisiertes Fadenpendel, bei welchem Reibungskräfte und der Luftwiderstand vernachlässigt werden. Weiter nimmt man an, dass das mathematische Pendel ein punkförmiges Gewicht besitzt und der Aufhängefaden massenlos und dessen Länge konstant ist. Die Bewegungsgleichung der Pendelschwingung wird durch die Berücksichtigung aller wirkenden Kräfte aufgestellt. Liegt das Pendel in der Ruhelage so wirkt nur die Gravitationskraft welche die Kugel nach unten zieht, $F=m \bullet g$. Wird die Masse m ausgelenkt so ergibt sich eine senkrechte als auch eine parallele oder tangentiale Kraft zur kreisförmigen Pendelbahn. Die senkrechte Konstante ($m \bullet g \bullet \cos(\varphi)$) wird durch die Zugkraft Fz des Fadens kompensiert. Die resultierende Kraft ist dann
$-m \bullet g \bullet \sin(\varphi)$ welche die Kugel entlang des Kreisbogens s beschleunigt.

Beschleunigte Kraft: $F= -m \bullet g \bullet \sin(\varphi)$

Die Schwingungsdauer ist unabhängig von der Masse des Pendels. Bei kleinen Schwingungen, also kleinen Auslenkungswinkeln φ, ist die Schwingungsdauer auch von der Amplitude unabhängig. Es handelt sich dann um eine harmonische Schwingung, wobei die Länge des Pendels und die Fallbeschleunigung die Schwingungsdauer bestimmen. Bei grossen Auslenkungswinkeln φ ergibt sich eine lange Schwingungsdauer.

a) S und φ hängen von der Zeit ab

   Man sucht nun eine lineare Ersatzfunktion für eine nicht lineare Funktion, hier:
   $F= -m \bullet g \bullet \sin(\varphi)$. Durch die Konstruktion einer Tangente im Punkt x_0 erhalten wir eine lineare Näherung.
   Die Tangente hat die Form: $F(X)=m \bullet x +q$
   Formel für die Ersatzfunktion: $L(x)=f'(x_0)\bullet(x-x_0)+f(x_0)$
   für $f'(x_0)=m=$ Steigung der Tangente
   $f(x_0)=q=$Ordinatenabschnitt
   d.h.:
   $x_0=\varphi_0=0$
   $f'(x_0)=f'(\varphi_0)=(-m \bullet g \bullet \sin(0))'= -m \bullet g \bullet \cos(0)= -m \bullet g \bullet 1= -m \bullet g$
   $f(x_0)= f(\varphi_0)= -m \bullet g \bullet \sin(0)= 0$
   daraus folgt:
   $L(x)=(-m \bullet g)\bullet(\varphi - 0)+0$
   $=-m \bullet g \bullet \varphi$

b) $s = (r \bullet \pi \bullet \varphi)/180°$ → Wenn φ grösser wird, so auch s.
c) $F(\varphi(t)) = mL \bullet (d/ dt) \bullet ((d/ dt) \bullet \varphi(t))$ mit $\varphi(t)=0$
   ➔ $F(0)=mL \bullet (d/dt) \bullet ((d/dt) \bullet 0)$
   ➔ $0=mL \bullet (d/dt) \bullet 0$
   ➔ Das Pendel wird nicht ausgelenkt also ist die Kraft die auf das Pendel wirkt gleich - null, da sich die Gewichtskraft und die Seilkraft ausgleichen.

d) $F(\varphi(t)) = -m \bullet g \bullet \varphi(t) = mL \bullet (d/\,dt) \bullet ((d/\,dt) \bullet \varphi(t))$

- ➔ $-g\bullet\varphi(t) = L \bullet (d/\,dt) \bullet ((d/\,dt) \bullet \varphi(t))$
- ➔ $(d^2/(dt)^2) \bullet \varphi(t) = \varphi''(t)$ (Doppelte Ableitung von φ(t)
- ➔ $-g\bullet\varphi(t) = L \bullet \varphi''(t)$
- ➔ $\varphi''(t) = (-g/L) \bullet \varphi(t)$

  w(winkelgeschwindigkeit) = $\sqrt{(g/l)}$ <=> $-g/l = -w^2$

  $\varphi''(t) = -w^2\varphi(t)$
- ➔ Nun gilt es heraus zu finden welche Funktion zwei Mal abgeleitet wieder sich selbst ergibt.

  $\text{Sin}''(t) = \cos'(t) = -\sin(t)$
- ➔ Die gewünschte Funktion heisst: $\sin(wt) = \varphi(t)$
- ➔ Beweis:

  $(-g/L) \bullet \sin(wt) = -w^2 \bullet \sin(wt)$
- ➔ Somit:

  $\varphi(t) = \sin(wt) = \sin(\sqrt{(g/l)} \bullet t)$